

Master Geoökologie - Umweltphysik -

Grundgleichungen der Umweltphysik 1. Atmosphäre

Prof. Dr. Th. Foken



Inhalt

- 1. Literatur**
- 2. Energieerhaltungsgleichung**
- 3. Navier-Stokes-Gleichung**
- 4. Analogiebetrachtung zu Boden/Wasser**
- 5. Turbulente Bewegungsgleichung**
- 6. Diffusionsgleichung (Fick'sches Gesetz)**
- 7. Seminaraufgaben**



Literatur

- Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N., 2007. Transport Phenomena, 2. Aufl. John Wiley & Son, New York, 905 pp.**
- Businger, J. A., 1982. Equations and concepts, In: Nieuwstadt, F. T. M., Van Dop, H., D. Atmospheric turbulence and air pollution modelling: A course held in The Hague, 21-25 September 1981, Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1-36.**
- Etling, D., 2008. Theoretische Meteorologie, 3. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg, 376 S.**
- Foken, T., 2006. Angewandte Meteorologie, 2. Aufl. Springer Verlag, 326 S. (2008. Micrometeorology, Springer Verlag, Berlin, 308 pp.)**
- Hantel, M., 2013. Einführung in die Theoretische Meteorologie, Springer-Spektrum, Heidelberg, XVIII, 430 S.**
- Stull, R. B., 1988. An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 666 pp.**
- Wyngaard, J. C., 2010. Turbulence in the Atmosphere, Cambridge University Press, Cambridge 393 pp.**



Die Energieerhaltungsgleichung

$$dE = -\vec{K} \cdot d\vec{r} - p \cdot dV + \vec{v} \cdot d\vec{P} + T \cdot dS + \mu \cdot dM + \dots$$

Energieumwandlungen

Unterscheidung in innere und äußere Energie

$$E = E_{inn.} + E_{äuß.}$$

$$E_{äuß.} = -\vec{K} \cdot d\vec{r} + \vec{v} \cdot d\vec{P}$$

$$E_{inn.} = -p \cdot dV + T \cdot dS + \mu \cdot dM$$

Äußere Energien sind auf das Modell des Massenpunktes bezogen.



Energieumwandlungen

Ändert ein physikalisches System	so erfährt es einen Zuwachs an	um $dE =$	Dabei ist
seinen Ortsvektor	Verschiebungsenergie	$-\vec{K} \cdot d\vec{r}$	K die bei r wirkende Kraft
seinen Impuls	Bewegungsenergie	$\vec{v} \cdot d\vec{P}$	v die Geschwindigkeit
sein Volumen	Kompressionsenergie	$-p \cdot dV$	p der Druck
seine Entropie	Wärmeenergie	$T \cdot dS$	T die Temperatur
seine Masse	chemische Energie	$\mu \cdot dM$	μ das chemische Potential

© Reuter et al. (1997)



Innere Energie

$$E_{inn.} = -p \cdot dV + T \cdot dS + \mu \cdot dM$$

- **Übergang zu spezifischen Größen: $e = E/M$**
- **$de = -p d\alpha + Tds$ bei adiabatischen Bedingungen:
 $c_v dT = -p d\alpha$**



Innere Energie

$$E_{inn.} = -p \cdot dV + T \cdot dS + \mu \cdot dM$$

- **Übergang zu spezifischen Größen: $e = E/M$**
- **Einführung der Enthalpie $dh = d(e + p \alpha) = \alpha dp + T ds$**
- **bei adiabatischen Bedingungen: $dh = c_p dT = \alpha dp$**
- **Anwendung der Gasgleichung und potenziellen Temperatur**



Innere Energie

$$E_{inn.} = -p \cdot dV + T \cdot dS + \mu \cdot dM$$

- **Übergang zu spezifischen Größen: $e = E/M$**
- **Einführung der Enthalpie $dh = d(e + p \alpha) = \alpha dp + Tds$**
- **bei adiabatischen Bedingungen: $dh = c_p dT = \alpha dp$**
- **Übergang zu Gasgemisch (Wasserdampf)**
- **$Tds = -\alpha dp + c_p dT + Ldq$**

Kompression/
Expansion

Änderung der
fühlbaren Wärme

Änderung der
latenten Wärme

Äußere Energie

$$E_{\text{äuß.}} = -\vec{K} \cdot d\vec{r} + \vec{v} \cdot d\vec{P}$$

- ***Potenzielle und kinetische Energie***
- ***Impulserhaltungssatz entspricht Bewegungsgleichung (Navier-Stokes-Gleichung) bzw. TKE-Gleichung***



Die Bewegungsgleichung (Navier-Stokes-Gleichung)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} u_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

Festlegungen zur Einstein'schen Summationsnotation

Laufindizes	i = 1,2,3	j = 1,2,3	k = 1,2,3
Geschwindigkeitskomponenten	u₁ = u	u₂ = v	u₃ = w
Längenkomponente	x₁ = x	x₂ = y	x₃ = z
Variablen	kein freier Index: Skalar	ein freier Index: Vektor	zwei freie Indizes: Tensor
Kronecker-Delta-Operator δ_{ij}	= +1, für i = j	= 0, für i ≠ j	
Alternierender Einheitstensor ε_{ijk}	= +1, für ijk = 123, 231 oder 312	= -1, für ijk = 321, 213 oder 132	= 0, für ijk = alle anderen Kombinationen



Reibungstensor

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{für } i \neq j$$

Bei kompressiblen Medien wird bei Normalspannung Volumenänderung durch Geschwindigkeitsdivergenz berücksichtigt

$$\tau_{ij} = \tau_{ii} = 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) - \mu' \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \text{für } i = j$$

Es gilt $\mu' = \frac{2}{3}\mu$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Vollständige Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} u_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right\}$$

Mit Gravitationspotential Φ und $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right\}$$

Analogiebetrauchtungen zu Boden/Wasser

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - 2\Omega \times \mathbf{v} + \nabla \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{v} \left\{ \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right\}$$

2. Fick'sches
Diffusionsgesetz

Darcy-
Gesetz

Mit Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0$$

folgt

Richards-Gleichung

$$\frac{\varepsilon \mu}{\kappa} \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \nabla \cdot \varrho (\nabla p - \varrho \nabla \Phi)$$

© Birt et al. (2007), Etling (2008)



Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{T}) = a_T \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i^2} + R$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right] + R$$

1. Fick'sches
Diffusionsgesetz

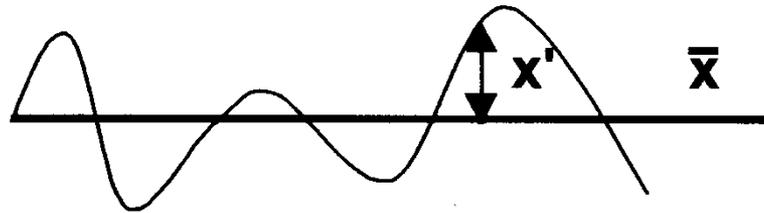
Gradientansatz für Fluss: $F_T = a_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$

Gradientansatz für turbulenten Fluss: $F_T = (a_T + K_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$

Die turbulente Bewegungsgleichung

Zerlegung in mittlere und turbulente Größen Reynolds'sche Zerlegung

$$x = \bar{x} + x'$$



Die turbulente Bewegungsgleichung

Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_j u_i} + \overline{u_j' u_i'} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i^2} + g \delta_{i3} + \varepsilon_{ijk} f \bar{u}_k$$

Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u_i T} + \overline{u_i' T'} \right) = a_T \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i^2} + R$$

Transportgleichung für Beimengungen

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u_i c} + \overline{u_i' c'} \right) = D \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i^2} + S$$

Wärmeleitungsgleichung mit K-Ansatz

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u_i T} + \overline{u_i 'T'} \right) = a_T \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i^2} + R$$

Nach Prandtl'schen Mischungswegansatz: $u_i 'T' = -K_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u_i T} - K_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) = a_T \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i^2} + R$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u_i T} \right) = \left(a_T + K_T \right) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i^2} + R$$

Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{c}) = (D + K_i) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i^2} + S$$

2. Fick'sches
Diffusionsgesetz
(turbulent)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} K_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} + S$$

Lösung des Fick'schen Diffusionsgesetz:

$$c(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-x_q)^2}{4K_x t} - \frac{(y-y_q)^2}{4K_y t} - \frac{(z-z_q)^2}{4K_z t}\right)$$

Diffusionsgleichung

$$c(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi t)^{3/2} (K_x K_y K_z)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-x_q)^2}{4K_x t} - \frac{(y-y_q)^2}{4K_y t} - \frac{(z-z_q)^2}{4K_z t}\right)$$

Gauß'sche Normalverteilung:

$$G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_y} \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma_y^2}\right)$$

Parametrisierung des turbulenten
Diffusionskoeffizienten (TKE-Gl.):

$$\sigma_{u_y}^2 = 2 \cdot K_y \cdot t$$

Konzentrationsverteilung bei konstantem Horizontalwind u_x :

$$c(x, y, z) = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot u_x \cdot \sigma_{u_y} \cdot \sigma_{u_z}} \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma_{u_y}^2} - \frac{z^2}{2 \cdot \sigma_{u_z}^2}\right)$$

Seminarthema 1

Begründen Sie Ausbreitungsmodelle aus der Navier-Stokes-Gleichung (Gauß-Modelle, numerische Modelle)

Literatur für den Beginn der Arbeiten:

Literatur zur theoretischen Meteorologie

Blackadar A.K. (1997) Turbulence and Diffusion in the Atmosphere Springer, Berlin, Heidelberg.

Groß, G., Etling D. (2003) Numerische Simulationsmodelle. Promet 30, 28-38

Schlünzen, K.H., Flagg, D.D., Fock, B.H., Gierisch, A., Lüpkes, C., Reinhardt, V., Spensberger, C. (2012): Scientific Documentation of the Multiscale Model System M-SYS (METRAS, MITRAS, MECTM, MICTM, MESIM). MEMI Technical Report 4. Meteorologisches Institut KlimaCampus Universität Hamburg. 138 p. (Download von WEB-Seite Prof. Schlünzen)



Seminarthema 2

Erläutern Sie den Unterschied von Euler'scher und Lagrange'scher Betrachtungsweise und zeigen Sie, wie Lagrange'sche Footprintmodelle aufgebaut sind.

Literatur für den Beginn der Arbeiten:

Grundlagenlehrbücher der Physik und Turbulenztheorie

Kljun N., Rotach M.W., Schmid H.P. (2002) A three-dimensional backward Lagrangian footprint model for a wide range of boundary layer stratification. *Boundary-Layer Meteorol* 103:205-226.

Leclerc M.Y., Thurtell G.W. (1990) Footprint prediction of scalar fluxes using a Markovian analysis. *Boundary-Layer Meteorol* 52:247-258.

Leclerc, M.Y., Foken, T. (2014) *Footprints in Micrometeorology and Ecology*, Springer, ca. 180 p. (Bereitstellung des relevanten Kapitels auf Anfrage)



Seminarthema 3

Erläutern Sie Lorenz-Gleichung, ihren meteorologischen Bezug und die praktische Bedeutung

Literatur für den Beginn der Arbeiten:

Grundlagenlehrbücher der Physik und Turbulenztheorie

Lorenz, E. N. (1963) "Deterministic nonperiodic flow". *Journal of the Atmospheric Sciences* 20 (2): 130–141

Hilborn, R. C. (2000) *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers* (second ed.). Oxford University Press



Seminarthema 4

Herleitung der WPL-Korrektur ausgehend von trockener oder feuchter Luft

Literatur für den Beginn der Arbeiten:

Aubinet, M., Vesala, T. & Papale, D. (2012). Eddy Covariance: A Practical Guide to Measurement and Data Analysis. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Webb, E. K., Pearman, G. I. & Leuning, R. (1980). Correction of the flux measurements for density effects due to heat and water vapour transfer. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 106: 85-100.

Bernhardt, K. & Piazena, H. (1988). Zum Einfluß turbulenzbedingter Dichteschwankungen auf die Bestimmung turbulenter Austauschströme in der Bodenschicht. Zeitschrift für Meteorologie 38: 234-245

