

Optimierung des Modells

1. Prüfung, ob die p und q für die größten Lags signifikant von 0 verschieden (t-Test) – wenn nicht, Ordnung erhöhen oder erniedrigen
2. Prüfen, ob die Residuen autokorreliert sind – wenn ja, p oder q erhöhen
3. Visueller Test, ob das Modell die wichtigsten Eigenschaften der Zeitreihe reproduziert
4. Überprüfung der Vorhersageleistung des Modells
5. Akaike- oder Schwarz-Informationskriterium

Zeitreihen mit langem Gedächtnis

Das Gedächtnis M einer Zeitreihe ergibt sich aus den

Autokorrelationskoeffizienten:
$$M = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\rho_k|$$

Langes Gedächtnis: $M = \infty$

z.B. algebraisches Abklingen für große Abstände: $\rho \propto 1/k^a$ mit $0 < a < 1$

ARIMA(p,q)-Modelle: Autokorrelation fällt exponentiell für große Abstände => Langzeitgedächtnis wird unterschätzt

Differenzenoperator für nicht-ganzzahlige d

Wiederholung: Der Differenzenoperator für $d = 1$:

$$x'(t_i) \equiv x(t_i) - x(t_{i-1}) = (1 - B)x(t_i)$$

Zweite Differenz (= Differenz der Differenzen) für $d = 2$:

$$\begin{aligned}x''(t_i) &= [x(t_i) - x(t_{i-1})] - [x(t_{i-1}) - x(t_{i-2})] \\&= x(t_i) - 2x(t_{i-1}) + x(t_{i-2}) \\&= x(t_i) - 2B[x(t_i)] + B^2[x(t_i)] \\&= (1 - B)^2 x(t_i)\end{aligned}$$

allgemein: $(1 - B)^d x(t_i) \rightarrow \nabla^d \equiv (1 - B)^d$

Der Differenzenoperator für nicht-ganzzahlige d

Entwicklung in eine Taylorreihe:

$$\nabla^d \equiv (1 - B)^d = 1 - dB - \frac{d(d-1)}{2} B^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{6} B^3 - \dots$$

=> alle vorangegangenen Zeitpunkte tauchen auf (bis zum Abbruch)!

=> unendlich langes Gedächtnis

Verhalten von FARIMA(p,d,q)-Modellen

$d = 0$	Normales ARMA-Modell, kurzreichweitig
$d > 0$ ganzzahlig	Normales ARIMA-Modell, kurzreichweitig
$d > -0.5$	invertierbar
$d < 0.5$	stationär
$0 < d < 0.5$	Langes Gedächtnis

Verhalten der Autokorrelation: $\rho_k \propto k^{-1+2d}$

d heißt **Persistenz**-Parameter ($d=0$ keine, $d=0.5$ maximale Persistenz)

FARIMA-Modell: Beispiel

Quelle: Montanari et al. (WRR 33, 1035-1044 (1997); WRR 36, 1249-1259 (2000))

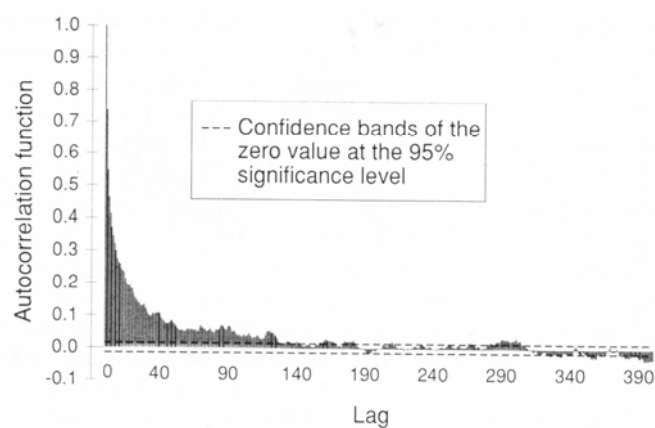
Datensatz: Zufluss zum Lago Maggiore 1943-1994

- 51 Jahre täglicher Werte, 18748 Datenpunkte

Vorgehensweise

1. Elimination von periodischen Instationaritäten:
Desaisonalisierung mit geeignetem Verfahren
2. Berechnung der Autokorrelation für die desaisonalisierte Reihe und Abschätzung der benötigten Terme für den Differenzenoperator
3. Ggf. Transformation der Daten, um Normalverteilung zu approximieren (*Box-Cox-Transformation*) (nicht immer nötig)
4. Bestimmung einer ersten Schätzung für d (s. Hurst-Analyse)
5. Wahl von p und q und Ermittlung der optimalen Koeffizienten mit *Maximum Likelihood*-Verfahren
6. Auswahl des besten Modells mit dem *Akaike-Information-Kriterium*

Autokorrelation (desaisonalisierte Daten)



=> Langreichweitige Autokorrelationen sind klar vorhanden;
die Entwicklung des Differenzenoperators sollte ca. 100 Terme umfassen.

Optimales Modell

Table 2. Portmanteau Statistic on the Residuals of the Estimated FARIMA (1, d , 1) Model and on the Residuals of Short-Memory ARIMA Models With Three Parameters

Model	Portmanteau Statistic at Lag		
	10	15	20
Maximum admissible value ($\alpha = 0.95$)	14.1	21.0	27.6
FARIMA (1, 0.38, 1)	17.6	35.0	51.9
ARIMA (3, 0, 0)	115.4	216.6	270.7
ARIMA (2, 0, 1)	338.9	515.4	604.2
ARIMA (1, 0, 2)	79.7	142.3	181.2
ARIMA (0, 0, 3)	2870.5	3628.9	4056.2

=> optimales Modell ist FARIMA(1,0.38,1):

$$(1 - 0.11B)(1 - B)^{0.38}x(t) = (1 + 0.23B)\eta(t)$$

Überprüfung des Modells

1. Untersuchung der Residuen (unkorreliertes Gaußsches Rauschen?) mit dem *Portmanteau-Test*
2. Rekonstruktion der Zeitreihe mit dem besten Modell und Vergleich von Autokorrelation und Wahrscheinlichkeitsverteilung
3. Falls erfolgreich: *Abflussgenerator* gefunden!

Autokorrelation der Residuen

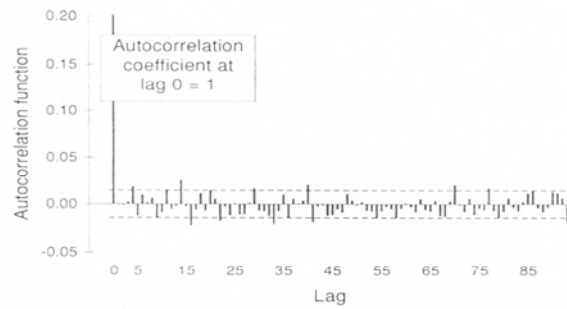
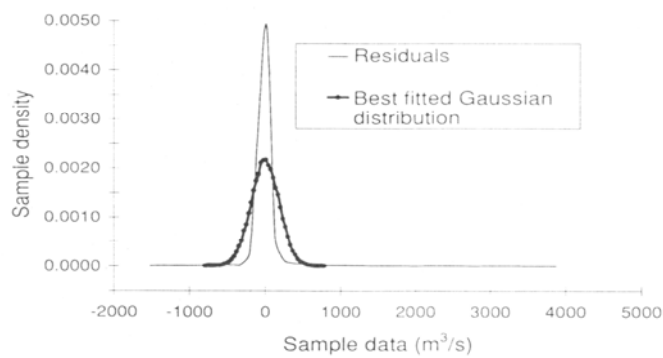


Figure 10. Autocorrelation function residuals of the FARIMA (1, d , 1) model applied to Lake Maggiore mean daily inflows (1943–1994). The two dashed lines show the 95% Gaussian confidence bands, displaced at $\pm 1.96 \sqrt{1/N}$, where N is the sample dimension.

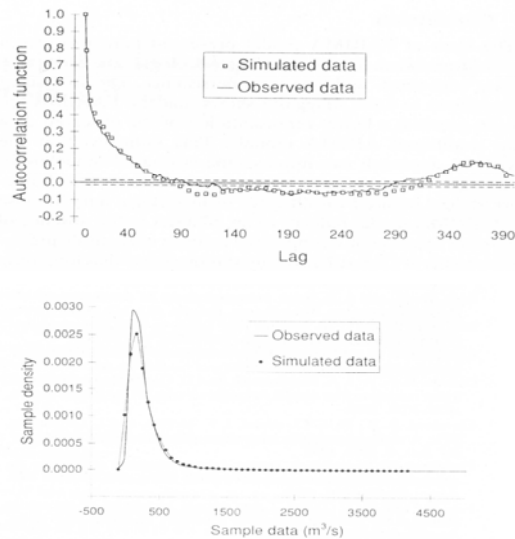
=> Das Restrauschen ist nicht signifikant autokorreliert

Verteilung der Residuen



=> Das Restrauschen ist nicht normalverteilt

Vergleich Daten-Modell



Das Hurst-Phänomen

Beobachtung (Hurst 1951):

Der Wertebereich q oder die Höhe von Extremereignissen hängt von der gewählten Zeitauflösung oder Aggregation k wie eine Potenzfunktion ab:

$$q \propto k^H \quad H: \text{Hurst-Koeffizient (-Exponent)}$$

Theoretische Rechnung: Bei Prozessen erster Ordnung (Random Walk, ARIMA(0,1,0), Brownsche Bewegung) gilt

$$H = 0.5$$

Beobachtung an Nil-Hochwässern (2000 Jahre):

$$H = 0.79 \pm 0.04$$

=> die Extremereignisse wachsen sehr viel schneller an: **Persistenz** bzw. „Joseph-Effekt“ (Mandelbrot and Wallis 1968)

Das Nilometer bei Kairo

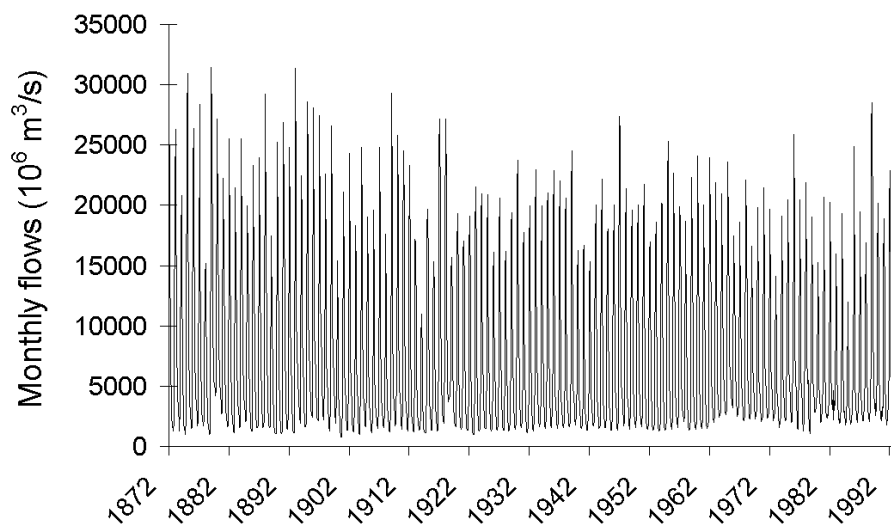
Längste
hydrologische
Zeitreihe der Welt:
621-1921 A.D.



aus: Sutcliffe and Parks (1999)

Plate 12 Interior of the Nilometer, Roda Island, Cairo.

Nil Abfluss 1872 - 1996



Beispiel Nil: Autokorrelation

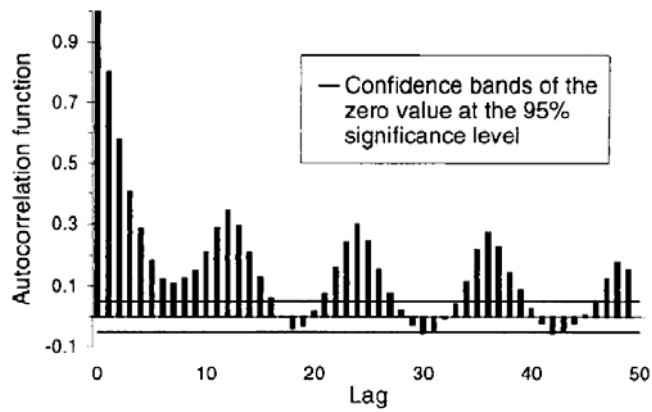


Figure 3. Autocorrelation function of the deseasonalized Nile River monthly flows at Aswan (August 1872 to September 1994).

Nil-Abfluss

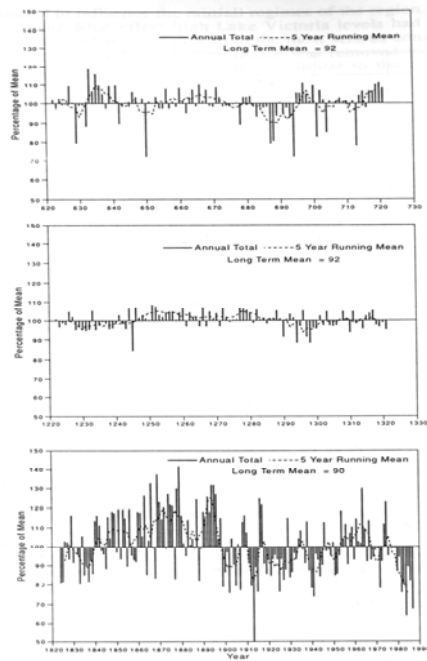
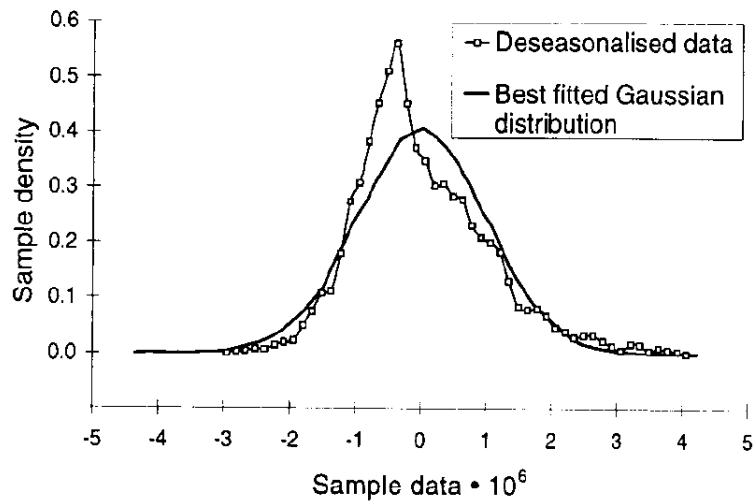


Figure 22: Departures from mean annual Nile flow (milliards) for periods 622-721, 1222-1321, 1822-1987 AD.

Nil-Wahrscheinlichkeiten



Bestimmung des Hurst-Koeffizienten

Eine Vielzahl von Methoden, die (theoretisch) zum gleichen Ergebnis führen:

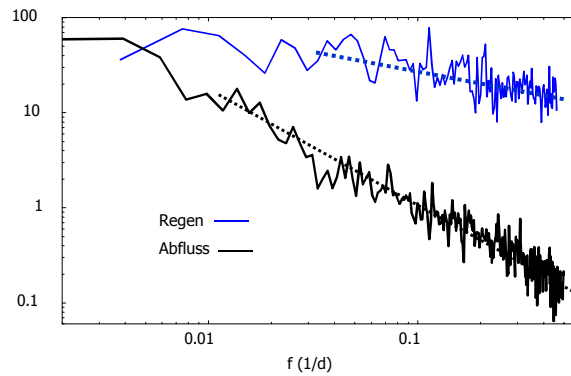
- Autokorrelation: $\rho(k) = C \cdot k^{-\alpha}$ und $H = 1 - \frac{\alpha}{2}$
- Spektralanalyse
- Rescaled Range Analysis (R/S) (*Hurst et al. 1965, Mandelbrot et al. 1968 ff.*)

Spektralanalyse

→ Power-Law-Verhalten bei niedrigen Frequenzen:

$$\text{Power-Spektrum: } SD \propto \frac{1}{f^\beta} \text{ mit } \beta = 2H + 1$$

(Steigung der Regressionsgeraden im doppeltlogarithmischen Plot)

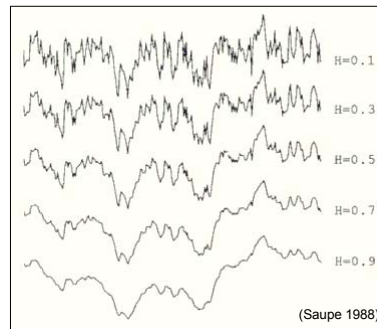


Random Walk

- = Brownsches Rauschen
- = 1/f-Rauschen mit der Spektralen Dichte

$$SD \propto \frac{1}{f^\beta} \text{ mit } H = 0.5 \text{ bzw. } \beta = 2H + 1 = 2$$
- Autokorrelation der $x(ti+1)-x(ti)$:

$$\rho(k) = 0 \quad \forall k$$
- Erweiterung: Fraktales Brownsches Rauschen
= Fractional Gaussian Noise: $0.5 < H < 1$



Die R/S Methode zur Hurst Statistik

1. Bestimme den mittleren Quotienten zwischen Spannweite R (Range) und Standardabweichung σ bzw. S der $x(t)$ für Fenster der Länge τ ($\tau \geq 8$), $R(\tau) = \max[x(t)] - \min[x(t)]$

$$R/S = \frac{R(\tau)}{S(\tau)}$$

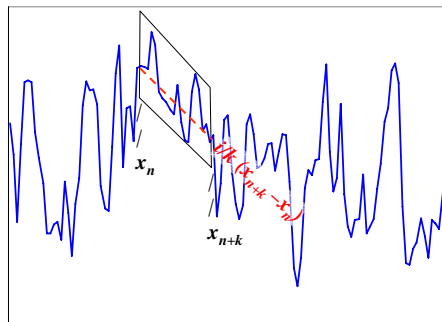
2. Führe die Analyse für Fenster unterschiedlicher Länge durch
3. Trage den R/S-Quotienten gegen die Fensterlänge auf (doppeltlogarithmische Grafik) und bestimme die Steigung der Regressionsgeraden H bzw. $H = \log\left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right) / \log(\tau)$

Berücksichtigung lokaler Trends

1. Berechnung jeweils für einzelne Fenster der Länge k :

- Abweichungen vom linearen Verhalten $D(n, i, k) = x_{n+i} - \frac{i}{k}(x_{n+k} - x_n)$

- Bereichsstatistik $R(n, k) = \max_{0 \leq i \leq k} D(n, i, k) - \min_{0 \leq i \leq k} D(n, i, k)$



Berücksichtigung lokaler Trends

1. Berechnung jeweils für einzelne Fenster der Länge k :

- Abweichungen vom linearen Verhalten $D(n, i, k) = x_{n+i} - \frac{i}{k}(x_{n+k} - x_n)$
- Bereichsstatistik $R(n, k) = \max_{0 \leq i \leq k} D(n, i, k) - \min_{0 \leq i \leq k} D(n, i, k)$
- Standardabweichung im Fenster $\sigma(n, k) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+k} (x(t_i) - \bar{x}(n, k))^2}$

2. Test-Statistik (gemittelt über alle Fenster der Länge k):

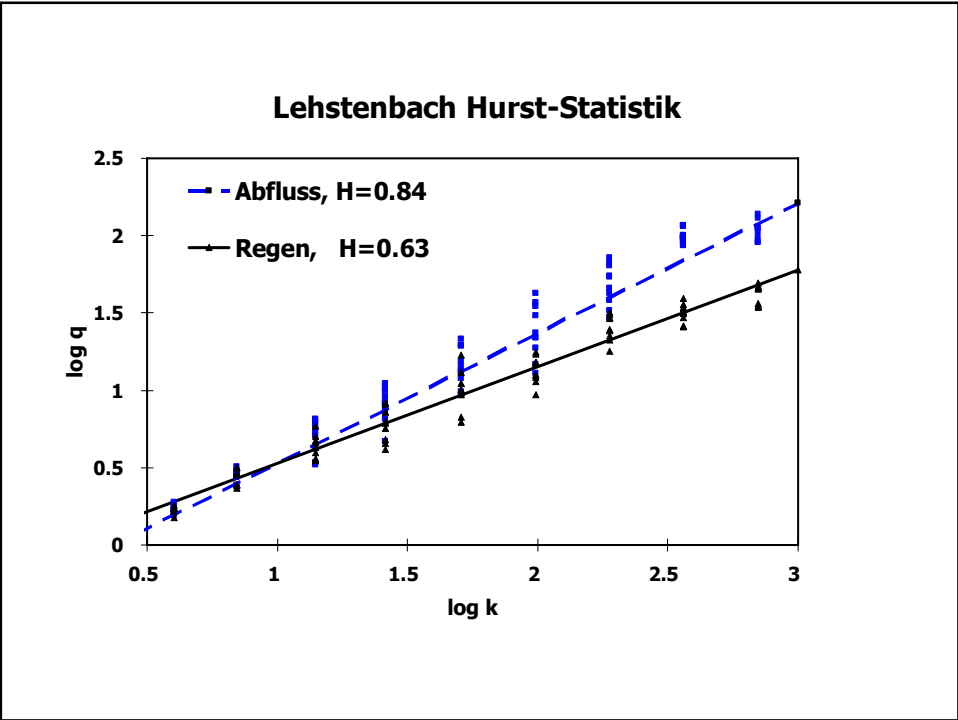
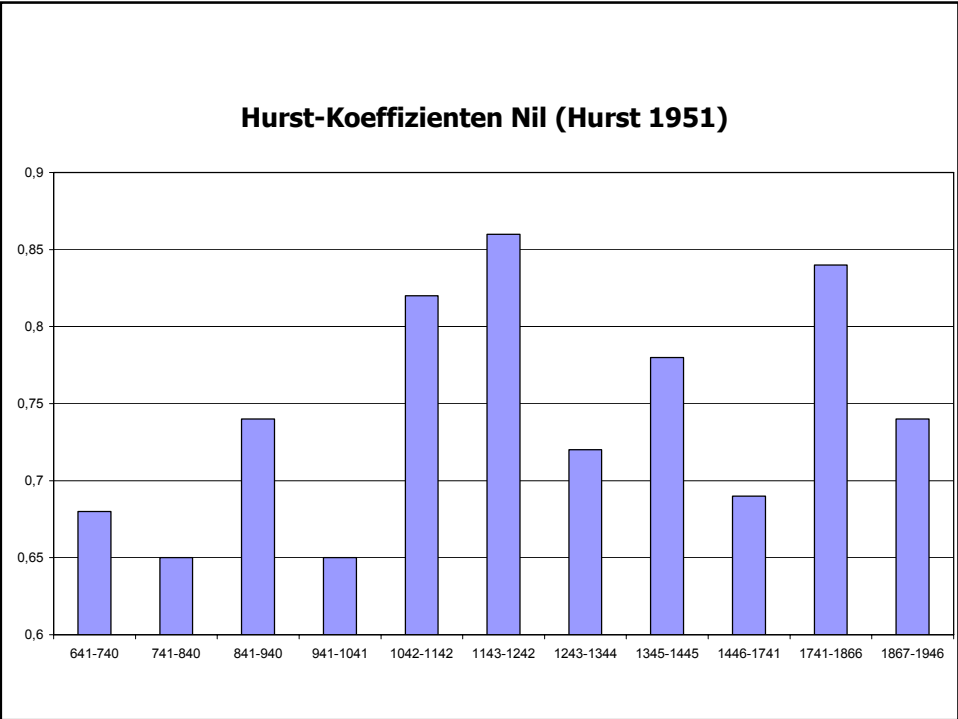
$$q(n, k) = \frac{R(n, k)}{\sigma(n, k)}$$

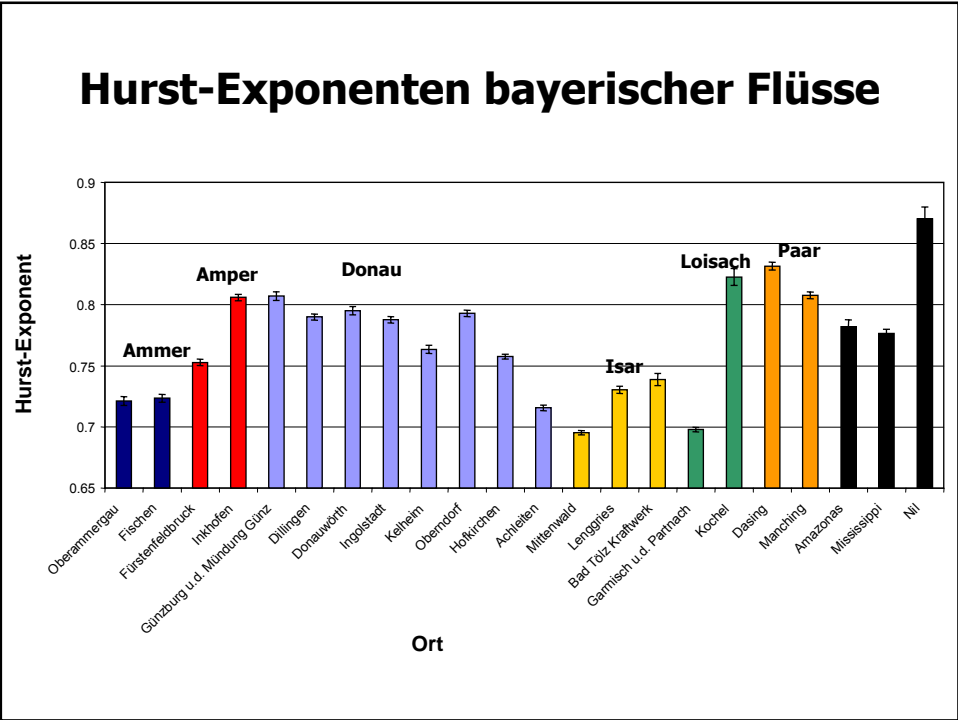
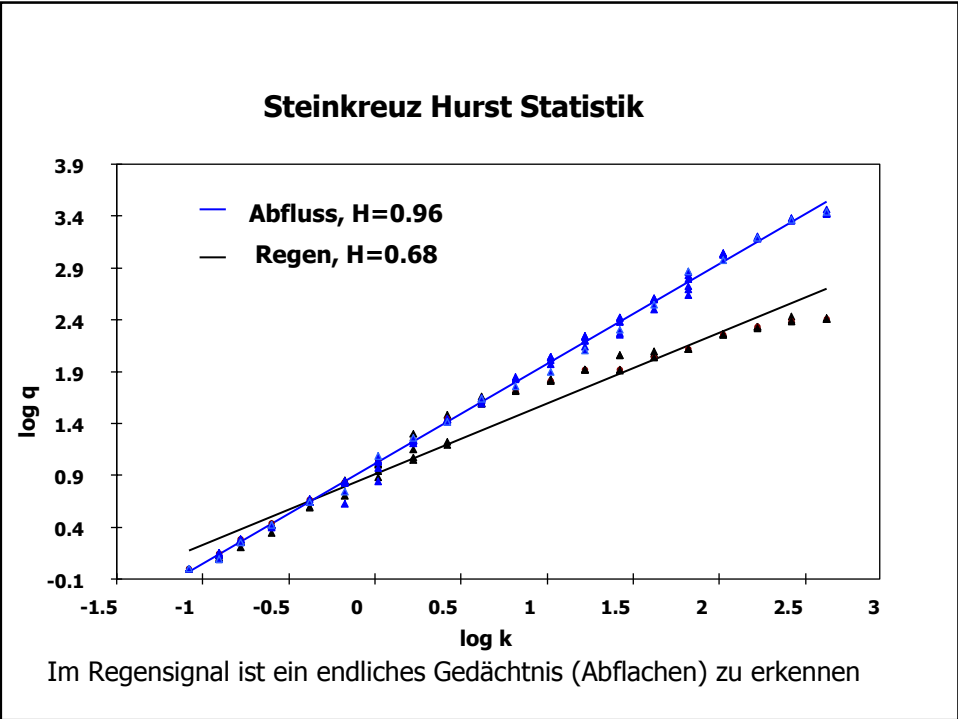
3. Erneute Berechnung für variierte k

4. Plote $\log q$ gegen $\log k$ und bestimme die Steigung H

Eigenschaften des Hurst-Exponenten

- Klassifikation von Prozessen:
 - Persistenz ($H > 0.5$),
 - Anti-Persistenz ($H < 0.5$),
 - Brownsches Rauschen ($H = 0.5$)
- Niederschlag meistens in der Nähe von $H=0.5$
- Typischer Abflusswert (Weltmittel) : $H=0.73$
(Nil ist ein Extremfall)
- Theoretischer Zusammenhang mit dem Persistenzparameter:
 $d=H-0.5$ (manchmal nicht gut erfüllt, s. später)
- Prinzipielles Problem:
Langsame Instationaritäten (sehr lange Mittelwertdrifts), die durch Trendtests nicht erkannt werden, führen zu $H>0.5$ genau wie "echte" Persistenz

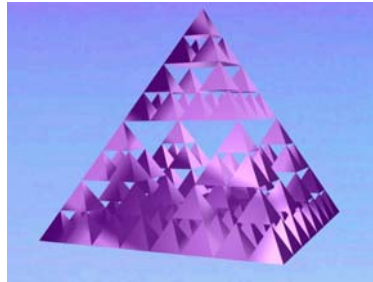




Bezug zur Fraktalen Geometrie

→ fraktale Dimension $D = 2 - H$ (Selbstähnlichkeit)

- Beispiel: Sierpinski-Pyramide



(http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/)

Aufgabe

1. Wählen Sie einen der Parameter des Files *Datensatz.xls* aus.
2. Enttenden und desaisonalisieren Sie die Daten.
3. Bestimmen Sie den Hurst-Koeffizienten mittels
 - der R/S-Methode (stufenweise Halbierung der k),
 - des Power-Spektrums,
 - der Autokorrelation.