

Topologische Eigenschaften

=> betreffen Nachbarschaftsbeziehungen von Objekten

- Beispiele für topologische Eigenschaften:
 - A liegt innerhalb von B
 - A berührt B
 - A ist mit B verbunden
 - A schneidet B
 - A überlappt mit B
- Beispiele für räumliche, aber nicht topologische Eigenschaften:
 - Abstand
 - Richtung
 - Länge, Durchmesser, Fläche

Topologische Beziehungen

zwischen zwei Objekten im 2-dim. Raum (Egenhofer 1989, 1994):

$$\Gamma_9(A, B) = \begin{pmatrix} A_{innen} \cap B_{innen} & A_{innen} \cap B_{grenze} & A_{innen} \cap B_{außen} \\ A_{grenze} \cap B_{innen} & A_{grenze} \cap B_{grenze} & A_{grenze} \cap B_{außen} \\ A_{außen} \cap B_{innen} & A_{außen} \cap B_{grenze} & A_{außen} \cap B_{außen} \end{pmatrix}$$

=> 8 prinzipielle topologische Beziehungen:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ disjoint	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A contains B	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ A is inside B	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A is equal to B
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ A meets B	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A covers B	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ A is covered by B	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ A overlaps with B

Wiederholung: Vektorrechnung

im 2-dimensionalen Raum mit $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$:

Betrag (Norm) eines Vektors: $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Skalarprodukt = Inneres Produkt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = (x_a \cdot x_b) + (y_a \cdot y_b)$$

Vektorprodukt = Spatprodukt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow$$

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \alpha$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

Wiederholung: Vektorrechnung

im 2-dimensionalen Raum mit $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$:

Schnittpunkt zweier Geraden/Strecken P_1P_2 und P_3P_4 :

$$x_s = x_1 + a \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = x_3 + b \cdot \left(\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \right) \quad \text{für Strecken muss außerdem gelten:}$$

$$y_s = y_1 + a \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \right) = y_3 + b \cdot \left(\frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3} \right)$$

$$x_1 \leq x_s \leq x_2 \quad x_3 \leq x_s \leq x_4$$

$$y_1 \leq y_s \leq y_2 \quad y_3 \leq y_s \leq y_4$$

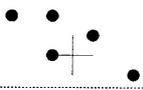
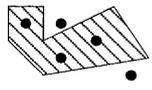
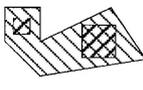
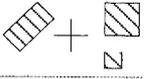
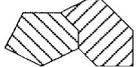
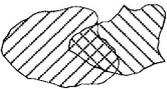
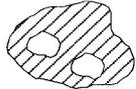
Kreislinie: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$

Rotation um den Winkel α : $\begin{pmatrix} x_{rot} \\ y_{rot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$
(entgegen dem Uhrzeigersinn)

Topologische Analyse

1. Grenzen von Flächen/Körpern
2. Lage von Punkten innerhalb/außerhalb von Polygonen
3. Überschneidung von Polygonen
4. Räumliche Verbindung von Objekten

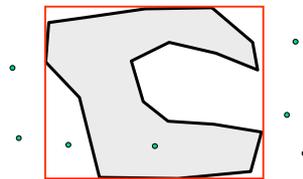
Topologische Analyse

Suche Punkt über (Näherungs-) Koordinaten 	Suche die nächst- liegenden n Punkte 	Suche alle Punkte im Rechteck (Range) 
Suche alle Punkte im Polygon 	Suche alle Objekte im Polygon 	Suche die nächst- liegenden n Objekte 
Suche angrenzende Objekte 	Suche überlappende Objekte 	Suche Inseln 

(Bartelme 2000)

1. Schritt: Bounding Box / Ball

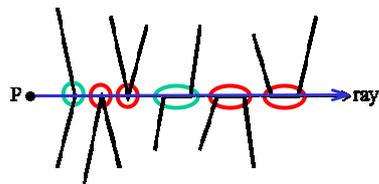
- umschreibe das Polygon mit einer einfachen geometrischen Struktur:
 - **Rechteck/Quader:** min. und max. x-, y-, z-Koordinaten der Polygon-Punkte
 - **Kreis/Kugel:** Mittelpunkt und maximale Entfernung vom Mittelpunkt der x-, y-, z-Koordinaten der Polygon-Punkte
- jeder Punkt, der außerhalb der Umschreibenden liegt, liegt auch außerhalb des Polygons
- effizient, wenn viele Punkte zu testen sind



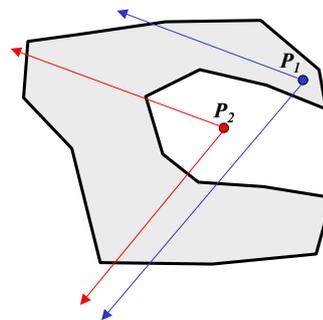
Crossing Number-Methode

= **Even-odd-Methode:**

- Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte N_c eines von dem Punkt P ausgehenden Strahls
- P liegt innerhalb des Polygons, wenn N_c ungerade ist
- Definition des Schnittpunkts:



(http://softsurfer.com/Archive/algorithm_0103/algorithm_0103.htm)



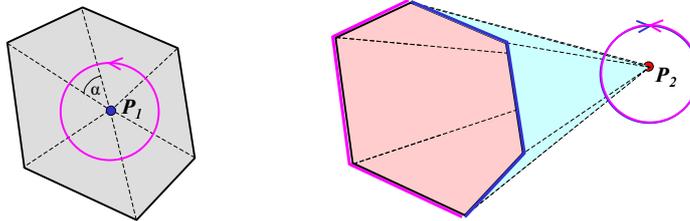
Winding Number-Methode

- Bestimmung der Anzahl der Windungen (Umschließungen) N_w :

$$N_w = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i$$

, wobei $sign(\alpha) = -1$ für Bewegung im Uhrzeigersinn
 , und $sign(\alpha) = 1$ für Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

- P_1 liegt innerhalb des Polygons, da $N_c = 1 > 0$ ist
- P_2 liegt außerhalb des Polygons, da $N_c = 0$ ist



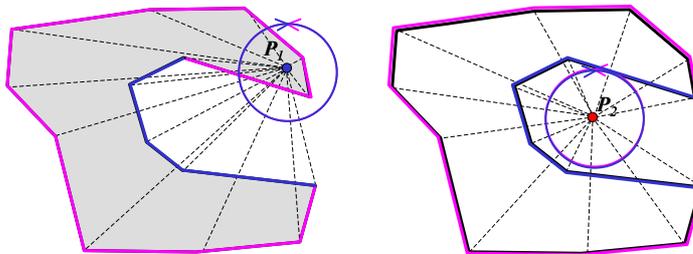
Winding Number-Methode

- Bestimmung der Anzahl der Windungen (Umschließungen) N_w :

$$N_w = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i$$

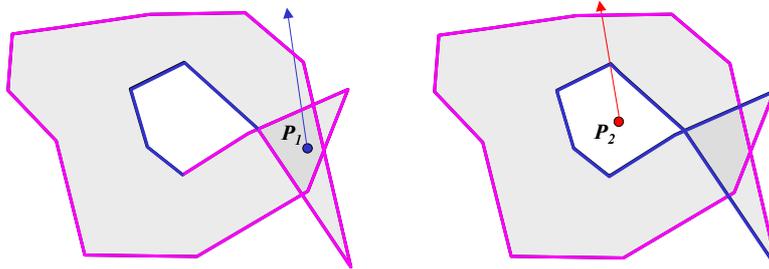
, wobei $sign(\alpha) = 1$ für Bewegung im Uhrzeigersinn
 , und $sign(\alpha) = -1$ für Bewegung gegen den Uhrzeigersinn

- P_1 liegt innerhalb des Polygons, da $N_c = 1 > 0$ ist
- P_2 liegt außerhalb des Polygons, da $N_c = 0$ ist



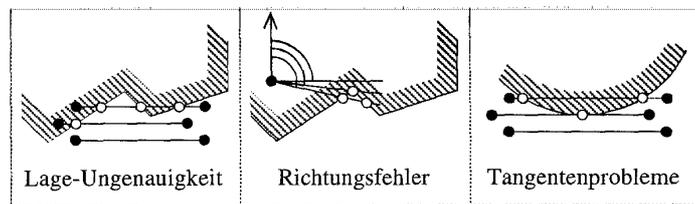
Crossing Number- vs. Winding Number-Methode

- i.d.R. identische Ergebnisse
- Ausnahme: sich selbst überlappende Polygone:



Numerische Probleme

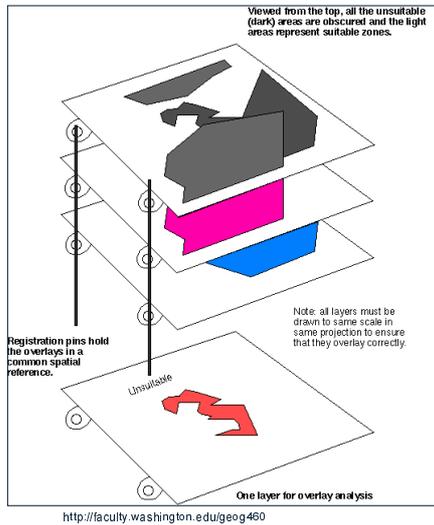
- Beispiele:



(Bartelme 2000)

=> Probleme bei der automatischen Analyse
außerdem oft Folgefehler

Topologische Operationen



Vector Overlay

- a new map layer is generated by performing an overlay operation on two (or more) input map layers

this graphic illustrates a manual map overlay operation

Topologische Operationen

About Dissolve
This operation aggregates features that have the same value for an attribute that you specify.

Dissolve

- reduces the number of features within a map layer by merging adjacent selected features that have a common attribute

About Merge
This operation appends the features of two or more themes into a single theme. Attributes will be retained if they have the same name.

Merge

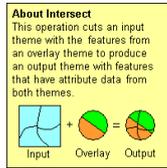
- used to create a new map layer that contains the features of two or more adjacent map layers of the same shapefile type
- useful for tiled vector information
- maintains the attributes contained in whichever map layer you select

About Clip
This operation uses a clip theme like a cookie cutter on your input theme. The input theme's attributes are not altered.

Clip

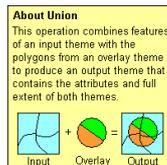
- creates a new map layer by using a polygon map layer as a type of spatial "cookie cutter" to clip another map layer (point, line, poly)
- useful when you need to crop a portion of one map layer to reduce the map extent
- attributes of the output map layer are the same as the input map layer you are clipping (but not the clip map layer)

Topologische Operationen



Intersect

- similarity to Clip - it preserves only those features falling within the spatial extent common to both map layers
- difference from Clip - the geometric intersection of the input map layer (line or polygon) and the intersect map layer (polygon only) is computed, resulting in a new shapefile
- output map layer's attribute table contains fields from both input map layers



Union

- creates a new map layer by combining the features and attributes of two polygon map layers
- geometric features from both input map layers are combined to form the geometry of the output map layer
- attributes of both map layers are carried over to the output map layer

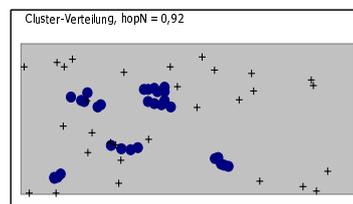
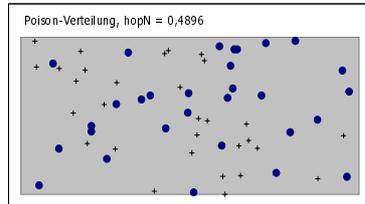
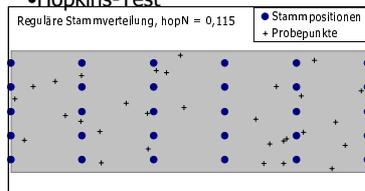
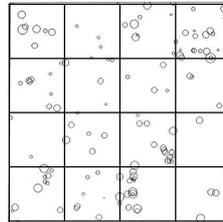
Analyse der räumlichen Topologie

- Was bedingt die Verteilung von Objekten im Raum?
- Beeinflussen die Eigenschaften eines Objektes seine Distanz zu den Nachbarn?
 - Gänse auf der Weide
 - Orchideen auf der Wiese
 - Buchen im Reinbestand / Mischbestand
 - Sämlinge auf dem Waldboden
 - Wurzeln im Bodenprofil

Räumliche Analyse der Topologie

Einfache Untersuchungen:

- Histogramm der Punktzahl in Gridzellen
- Clark-Evans-Index $R = \frac{\bar{r}}{\sqrt{\rho}}$
- Hopkins-Test



Räumliche Analyse der Topologie

Punktprozesse

Annahmen:

- Objekte liegen in homogener Zufallsverteilung (Poisson-Verteilung) im Raum
- Objekte stehen im Raum in Wechselwirkung miteinander
- Wechselwirkungen können als Felder modelliert werden
- „Kräfte“ können positiv oder negativ sein

Folge:

- Objekte dünnen sich entweder aus oder verschieben sich im Raum

Räumliche Analyse der Topologie

Markierte Punkt-Prozesse:

- $[x; m(x)]$, x Punkte einer Ebene und $m(x)$ deren Marken
- homogen und isotropisch (keine systematischen Abweichungen der Punktdichte und keine bevorzugten Richtungen in den Punkt-Mustern)
- $m(x) > 0$
- Dichte λ : mittlere Anzahl per Flächeneinheit
- die mittlere Marke μ : Mittelwert von $m(x)$
- Nehmen wir einen infinitesimal kleinen Kreis der Fläche dx , dann ist die Wahrscheinlichkeit darin einen Punkt zu finden λdx .

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

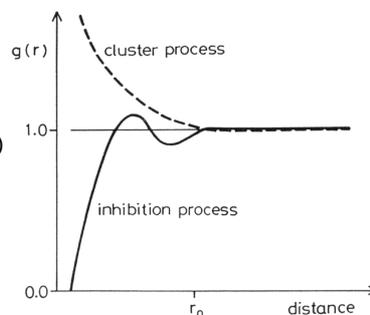
Räumliche Analyse der Topologie

Nehmen wir zwei infinitesimal kleine Kreise der Flächen dx und dy und einem Mittelpunkt-Abstand r . $P(r)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kreise je einen Punkt enthalten:

$$P(r) = \lambda^2 g(r) dx dy$$

-> **Paar-Korrelations-Funktion $g(r)$**

$g(r) \equiv 1$ vollständig zufälligen Punkt-Prozess (z.B. ein homogener Poisson-Prozess)



Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

Räumliche Analyse der Topologie

Paar-Korrelations-Funktion & Co:

$$K(r) = \int_0^r g(u) 2\pi u du, r > 0,$$

K-Funktion oder Ripley's K:

$\lambda K(r)$ ist die mittlere Anzahl von weiteren Punkten die bis zu einer Entfernung r gefunden werden können.

Im homogenen Poisson-Prozess ist $K(r) = \pi r^2$.

$$L(r) = \sqrt{K(r)/\pi}$$

Transformierte K-Funktion

Im homogenen Poisson-Prozess ist $L(r)=r$.

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

Räumliche Analyse der Topologie

Paar-Korrelations-Funktion & Co:

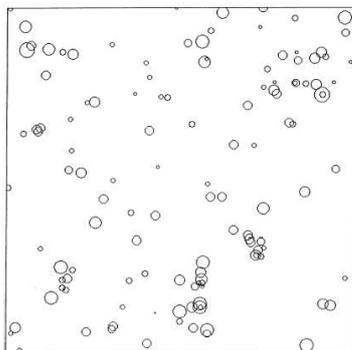
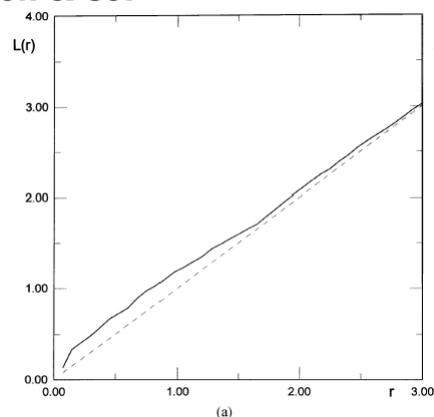


FIG. 1. 126 young pines in a 10 m x 10 m square plot in a Finnish forest. The trees are shown as circles, the diameters of which are proportional to the tree heights. This pattern is highly clustered; some trees are very close together.



The values of $L(r)$ for the pines are greater than r for $r \leq 3$ m, which indicates clustering of the pattern.

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

Räumliche Analyse der Topologie

Paar-Korrelations-Funktion & Co:

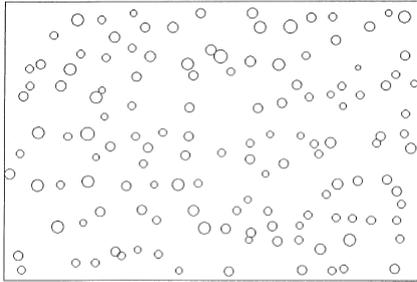
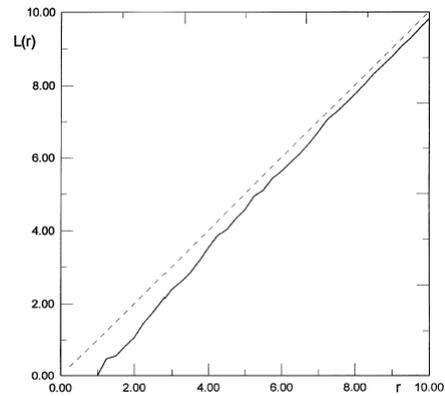


FIG. 2. 134 spruces of age 60 years in a 56 m x 38 m stand of Tharandter Wald (Germany). The trees are shown as circles, where the diameters are proportional to the bhd's.



(b)
L(r) vanishes for $r < 1$ m because the minimum intertree distance is 1 m. The values of L(r) smaller than r indicate some form of "repulsion" between the trees, which is in this case mainly a result of forester's work.

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

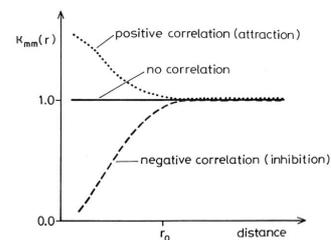
Räumliche Analyse der Topologie

$$M(r) = \lambda^2 g(r) k_{mm}(r) dx dy.$$

$M(r)$: Mittelwert der Produkte der Marken der Punkte

$k_{mm}(r)$ beschreibt die Beziehung zwischen den Marken

$k_{mm}(r) > \mu^2$ zeigen eine positive Korrelation



Wegen Spezialfall nicht korrelierter Marken ($k_{mm}(r) = \mu^2$ für alle r) wird skaliert:

$$K_{mm}(r) = k_{mm}(r) / \mu^2$$

-> **Marken-Korrelations-Funktion $K_{mm}(r)$**

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

Räumliche Analyse der Topologie

Schätzung der Paar- und Marken-Korrelation in emp. Daten

Problem 1: In einer endlichen Menge von Punkte-Paaren können die Funktionen nicht für einen stetigen Intervall von $0 \rightarrow r$ bestimmt werden.

Lösung 1: Der Wert eines Punkte-Paares mit Abstand r wird auch bei Abständen ungleich r berücksichtigt. Die Abweichung von r wird als Gewichtung berücksichtigt.
-> Kern-Funktion w

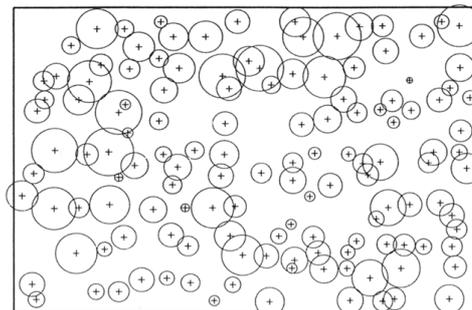
Problem 2: Auf endlichen Versuchsflächen spielt der Kanteneffekt gerade bei Paarbeziehungen eine wesentliche Rolle.

Lösung 2: Oser-Stoyan-Korrektur
-> Kanten-Korrektur-Faktor

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

Räumliche Analyse der Topologie

Schätzung der Paar- und Marken-Korrelation in emp. Daten



○ =20.0 cm ○ =30.0 cm ○ =40.0 cm

Fichten ($n=134$) in einem rechteckigen Plot von

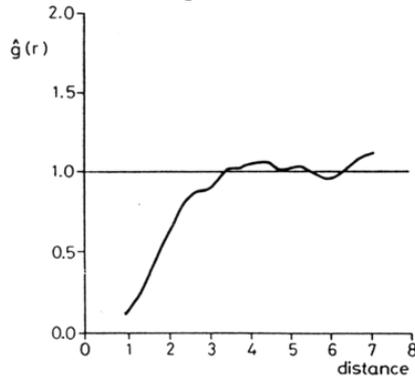
56mx38m:

Baum-Positionen (+) und zu den Baum-Durchmessern proportionale Kreis-Durchmesser. Die Durchmesser sind nicht im selben Maßstab, wie die Positions-Karte: der wahre Maßstab der Durchmesser ist unter der Karte dargestellt.

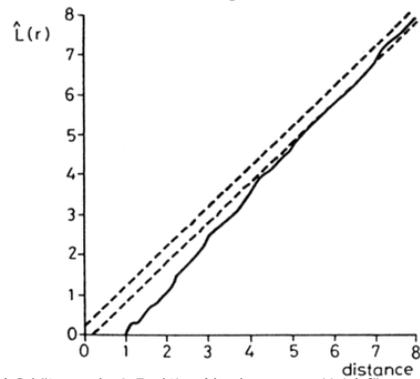
Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

Räumliche Analyse der Topologie

Schätzung der Paar- und Marken-Korrelation in emp. Daten



(a) Kern-Schätzung der Paar-Korrelations-Funktion für das Fichten-Beispiel. Die Kern-Weite ist $\delta=0,9\text{m}$. Die Kurve bleibt bis zu einer Entfernung von ungefähr 3m unter dem Wert 1, was Hemmung bedeutet. Die Hüllkurve ab 3m wird als zufällige Abweichung um den Wert 1 interpretiert;

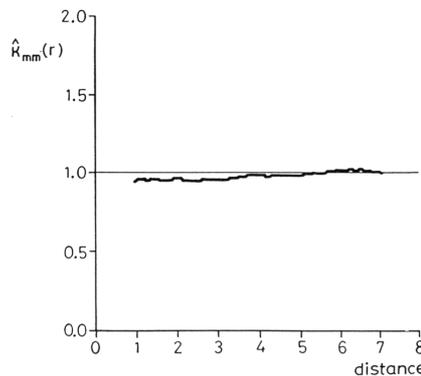


(b) Schätzung der L-Funktion (durchgezogene Linie) für Fichte mit einer 95%-Akzeptanz-Region (gestrichelte Linie). Wenn der Punkt-Prozess eine Stichprobe eines homogenen Poisson-Prozesses wäre, dann müsste die geschätzte L-Funktion in dieser Region liegen. Da sich die beobachtete L-Funktion außerhalb der Akzeptanz-Region befindet, kann die Struktur nicht vollständig zufällig sein.

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38

Räumliche Analyse der Topologie

Schätzung der Paar- und Marken-Korrelation in emp. Daten



Die Schätzung der Marken-Korrelations-Funktion für das Fichten-Beispiel. Die Kern-Weite ist dieselbe, wie in Abbildung 6a. Die Kurve wird als zufällige Abweichung um den Wert 1 interpretiert.

Penttinen, A. K., Stoyan, D. and Henttonen, H. M. (1992). Marked point processes in forest statistics. Forest Sci. 38