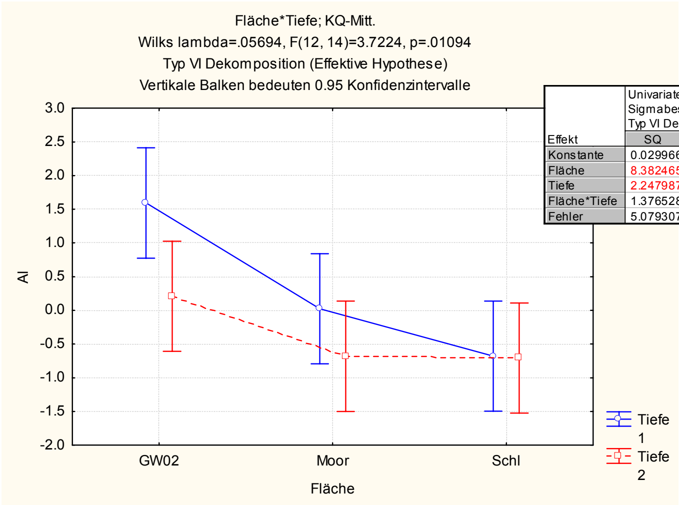
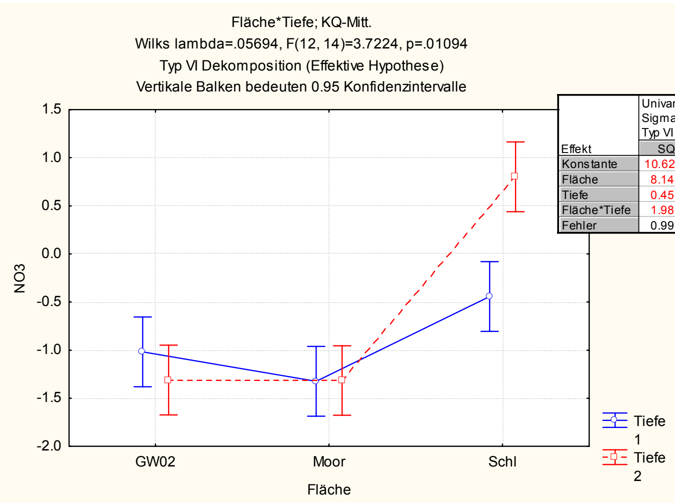
Al: Keine signifikanten Wechselwirkungen



Univariate Signifikanztests für Al (Piezometer.sta)
Sigmabeschränkte Parametrisierung
Typ VI Dekomposition (Effektive Hypothese)

Effekt	SQ	FG	MQ	F	p
Konstante	0.029966	1	0.029966	0.070795	0.794700
Fläche	8.382465	2	4.191232	9.901900	0.002885
Tiefe	2.247987	1	2.247987	5.310931	0.039868
Fläche*Tiefe	1.376528	2	0.688264	1.626042	0.237199
Fehler	5.079307	12	0.423276		

NO_3: Signifikante Wechselwirkungen



Univariate Signifikanztests für NO3 (Piezometer.sta)
Sigmabeschränkte Parametrisierung
Typ VI Dekomposition (Effektive Hypothese)

Effekt	SQ	FG	MQ	F	p
Konstante	10.62152	1	10.62152	128.2883	0.000000
Fläche	8.14496	2	4.07248	49.1880	0.000002
Tiefe	0.45807	1	0.45807	5.5326	0.036569
Fläche*Tiefe	1.98892	2	0.99446	12.0113	0.001367
Fehler	0.99353	12	0.08279		

Quadratsummenzerlegung

2 Faktoren (UV) ***A***, ***B***, mit jeweils ***p*** Stufen und ***n*** Wiederholungen => $N = p^2 \cdot n$

- QS_{tot}: $$QS_{tot} = \sum_{i=1}^{n \cdot p} (x_i - \bar{x})^2 \qquad QS_{tot} = QS_{Zellen} + QS_{Fehler}$$
- **Zelle**: alle Wiederholungen der gleichen Behandlung (A, B) und der gleichen Behandlungsstufe
  QS_{Zellen}: $$QS_{Zellen} = n \cdot \sum_{k=1}^{2} \sum_{I=1}^{p} (\bar{x}_{ki} - \bar{x})^2$$
- QS_{Fehler}: $$QS_{Fehler} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{n} (x_{kim} - \bar{x}_{ki})^2$$
- QS_A, QS_B: $$QS_A = p \cdot n \cdot \sum_{I=1}^{p} (\bar{x}_{Ai} - \bar{x})^2 \qquad QS_B = p \cdot n \cdot \sum_{I=1}^{p} (\bar{x}_{Bi} - \bar{x})^2$$
- QS_{AxB}: $$QS_{Zellen} = QS_A + QS_B + QS_{AxB}$$

Zweifaktorielle ANOVA: Freiheitsgrade

- *2* Faktoren (UV) ***A*** mit ***p*** Stufen, ***B*** mit ***q*** Stufen und jeweils ***n*** Wiederholungen => $N = p \cdot q \cdot n$

1-faktoriell	2-faktoriell
	$df_A = p - 1$
	$df_B = q - 1$
	$df_{AxB} = p \cdot q - (p + q - 1) = (p - 1) \cdot (q - 1)$
$df_{treat} = p - 1$	$df_{Zellen} = p \cdot q - 1 = df_A + df_B + df_{AxB}$
$df_{Fehler} = p \cdot (n - 1)$	$df_{Fehler} = p \cdot q \cdot (n - 1)$
$df_{tot} = (p \cdot n) - 1$	$df_{tot} = (p \cdot q \cdot n) - 1$

Konfidenzintervall

= geschätzter Bereich, in dem mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein bestimmter Wert liegt

Beispiele:

Schätzung des	wenn	
Erwartungswerts	- Normalverteilung - Varianz bekannt	$x_{KI} = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
Erwartungswerts	- Normalverteilung - Varianz unbekannt	$x_{KI} = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t\left(1-\frac{\alpha}{2}; n-1\right)$
Erwartungswerts	- Verteilung unbekannt - Varianz unbekannt - n > 50	$x_{KI} = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

$z(.)$: *Quantil der Normalverteilung*

s: *Standardabw. der Stichprobe*

Scheffé-Test

= post-hoc-Test der ANOVA

- Für Paarvergleiche von Mittelwerten (einzelner Zellen)
- relativ robust gegen Verletzungen der Voraussetzungen
- tendenziell konservativ (zugunsten der H_0)
- Wahrscheinlichkeit eines α-Fehlers für jeden möglichen Einzelvergleich ≤ Signifikanzniveau α der ANOVA
- Hinweis: u.U. ergibt trotz signifikanter Effekte (ANOVA) keiner der Scheffé-Mittelwertsvergleiche einen signifikanten Unterschied

  Grund: Basis des Scheffé-Tests ist die Annahme, dass auch Kombinationen von Mittelwerten auf Signifikanz geprüft werden können

Scheffé-Test

Beispiel: für einfaktorielle ANOVA, p Stufen

- signifikanter Unterschied, wenn **F**-Wert des Einzelvergleichs ≥ kritische Differenz (s. Konfidenzintervall)
- beachte: FG der QS_{einzel} (Einzelvergleichsquadratsumme) = 1
  FG der QS_{treat} = p-1, Anzahl der möglichen Einzelvergleiche = 2(p-1)·p
- kritische Mittelwertsdifferenz:

$$\Delta_{\bar{x}\,crit} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p-1) \cdot \hat{\sigma}^2_{Fehler} \cdot F_{(p-1;\,N-p;\,1-\alpha)}}{n}}$$

$$\Delta_{\bar{x}\,crit} = \frac{\hat{\sigma}_{Fehler}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2 \cdot (p-1) \cdot F_{(p-1;\,N-p;\,1-\alpha)}}$$

Varianzanalyse = ANOVA

(Analysis of Variance)

Ziel: Bestimmung des Anteils verschiedener Einflussfaktoren (UV) an der beobachteten Varianz der AV

Methode:

1. Quadratsummenzerlegung → Voraussetzungs-frei

2. F-Test → Voraussetzungen:

- Normalverteilung der Fehlerkomponenten (= Abweichungen der Messwerte vom jeweiligen Stichprobenmittel) (*selten überprüft*)
- gleiche Varianzen der Fehlerkomponenten (Homoskedastizität) (*Bartlett-Test, Levene-Test; ungleiche Varianzen für p <0,05*)
- Unabhängigkeit der Fehlerkomponenten innerhalb und zwischen den Stichproben (*s. Randomisierung*)

bes. kritisch: **kleine, ungleichgroße** Stichproben und **heterogene Varianzen** => verteilungsfreie Verfahren **(Kruskal-Wallis)**

Kruskal-Wallis-Test

- Erweiterung des Wilcoxon-Tests für $k > 2$ Gruppen
- verteilungsfrei (nicht-parametrisch)
- Hypothesen: **H$_0$**: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ...$;
  H$_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ = für mindestens zwei $\mu_{i,}$ μ_j

Wilcoxon-Test

- Keine Annahme über die generelle Verteilung der Daten
- ***jedoch*** Annahme, dass die Werte der Stichproben jeweils symmetrisch um den Median streuen
- auch für unterschiedlich große Stichproben geeignet
- Vergleich der ***Mediane*** zweier Gruppen, Hypothesen:
  H$_0$: $m_1 = m_2$
  H$_1$: $m_i \neq m_j$
- ähnlich: Mann-Whitney-Test

Wilcoxon-Test

- Berechnung der Rangsumme $\boldsymbol{R_a}$ für die kleinere Stichprobe
- Vergleich mit tabellierten Werten

Kruskal-Wallis-Test: Methode

- Sortieren aller Einzelmessungen => Bestimmung ihrer Ränge
- Bestimmung der **Rangsummen** $\boldsymbol{R_i}$ für die $\boldsymbol{k}$ einzelnen Gruppen (Faktoren x Stufen) mit jeweils $\boldsymbol{n_i}$ *(n > 4)* Wiederholungen (Gesamtzahl: N)
- Test-Statistik:

$$H = \left(\frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} \right) - 3 \cdot (N+1)$$

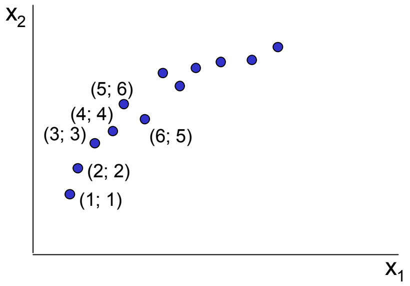
- wenn die $\mathbf{H_0}$ gilt, unterliegt $\boldsymbol{H}$ einer χ^2-Verteilung mit $(k - 1)$ Freiheitsgraden
- die $\mathbf{H_0}$ ist abzulehnen, wenn H > $\chi^2(\alpha;\ k - 1)$

zum Vergleich:
Spearman Rang-Korrelation

Spearman-Rangkorrelationskoeffizient:

(D_i: Rangplatzdifferenzen)

$$r_R = 1 - \frac{6 \cdot \sum D_i^2}{n^3 - n}$$



Beispiel: k = 3 Gruppen

	Gruppe A (n = 8)		Gruppe B (n = 7)		Gruppe C (n = 6)	
	Messwert	Rang	Messwert	Rang	Messwert	Rang
	6.4		2.5		1.3	
	6.8		3.7		4.1	
	7.2		4.9		4.9	
	8.3		5.4		5.2	
	8.4		5.9		5.5	
	9.1		8.1		8.2	
	9.4		8.2			
	9.7					
Rangsumme						
mittlerer Rang						

(http://vassun.vassar.edu/~lowry/ch14a.html)

$$H = \left(\frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} \right) - 3 \cdot (N+1)$$

Beispiel: k = 3 Gruppen

	Gruppe A (n = 8)		Gruppe B (n = 7)		Gruppe C (n = 6)	
	Messwert	Rang	Messwert	Rang	Messwert	Rang
	6.4	11	2.5	2	1.3	1
	6.8	12	3.7	3	4.1	4
	7.2	13	4.9	5.5	4.9	5.5
	8.3	17	5.4	8	5.2	7
	8.4	18	5.9	10	5.5	9
	9.1	19	8.1	14	8.2	15.5
	9.4	20	8.2	15.5		
	9.7	21				
Rangsumme		131		58		42
mittlerer Rang		16.38		8.29		7.00

(http://vassun.vassar.edu/~lowry/ch14a.html)

$$H = \left(\frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} \right) - 3 \cdot (N+1)$$

Kruskal-Wallis: Post-hoc-Test

Kritische Differenz der Rangmittelwerte:

$$\Delta_{\bar{R};\,\alpha=0.05} = 2.394 \cdot \sqrt{\frac{N \cdot (N+1)}{12} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

n_1, n_2: Anzahl der Wiederholungen innerhalb der einzelnen Zellen

$N = n_1 + n_2$

Aufgabe

1. Testen Sie mittels des Wilcoxon-Tests die Unterschiede zwischen den beiden Tiefenstufen auf Signifikanz. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des t-Tests.

2. Berechnen Sie für den Datensatz den Kruskal-Wallis-H-Wert getrennt für die beiden Faktoren und für einzelne Parameter (Cl, DOC, pH, NO_3).

3. Führen Sie zum Vergleich in Statistica den Kruskal-Wallis-Test sowie die einfaktorielle ANOVA durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.