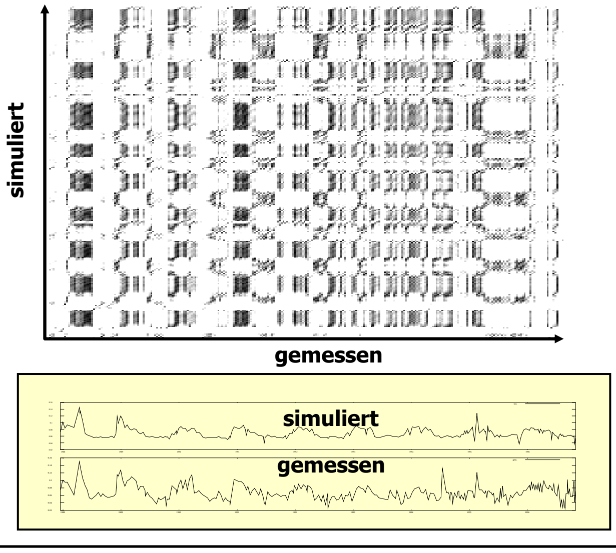
Kreuzwiederkehrdiagramme

- Vergleich zweier unterschiedlicher Datenreihen
- vorher Daten auf einen einheitlichen Wertebereich skalieren (z.B. [0,1])
- Interpretation bzw. Quantifizierung analog zu RP bzw. RQA

Nitrat: Vergleich Modell-Messung



Quantitative Analyse der Wiederkehrdiagramme (*RQA = Recurrence Quantification Analysis*)

Ziel: Anhand der Recurrence Points (***RP***) Maßzahlen für Muster bestimmen

Wiederkehrrate = Anteil der RP

$$RR = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} R_{i,j}$$

Determinismus = Anteil der RP, die auf Linien parallel zur 1:1-Diagonale entfallen *(P(l): Häufigkeit)*

$$DET = \sum_{l=l_{\min}}^{n} l \cdot P(l) \Big/ \sum_{i,j=1}^{n} R_{i,j}$$

Linienlängen-Entropie = Shannon-Entropie der Verteilung der Längen der Linien parallel zur 1:1-Diagonalen (*p(l): Wahrscheinlicheit*)

$$ENTR = -\sum_{l=l_{\min}}^{n} p(l) \cdot \ln p(l)$$

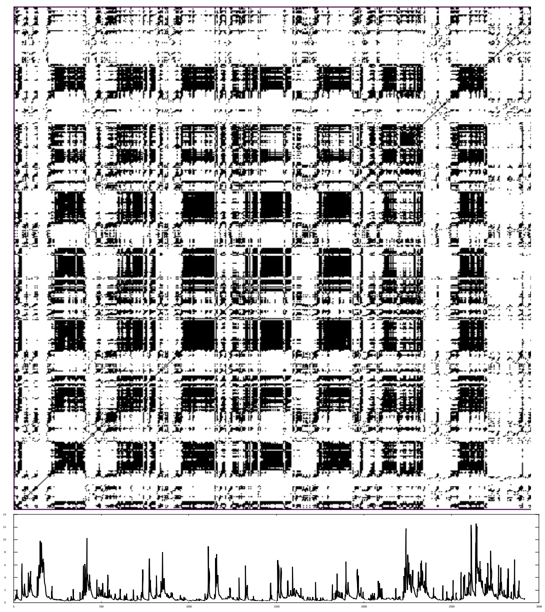
Maximale Linienlänge parallel zur 1:1-Diagonale

$$L_{\max} = \max(\{l_i; i = 1,\ldots,n_l\})$$

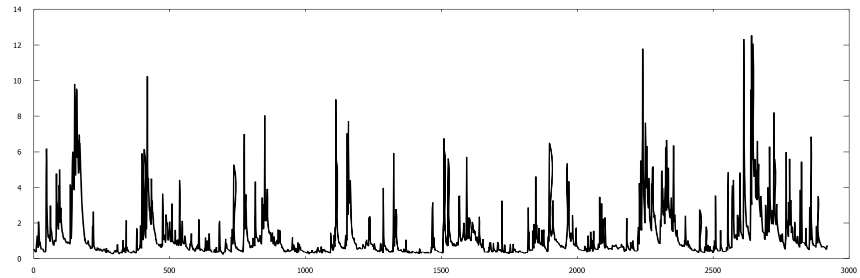
Trend = Ausdünnen der RP zu den Ecken hin

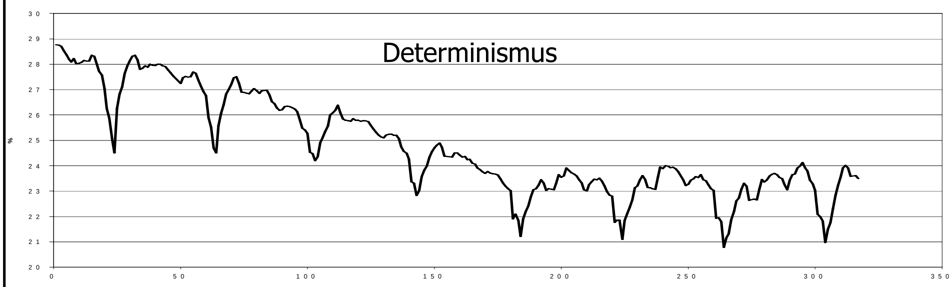
$$TREND = \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} (i - \tilde{n}/2) \cdot (RR_i - \overline{RR_i})}{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} (i - \tilde{n}/2)^2}$$

RQA Lehstenbach-Abfluss 1987-1995

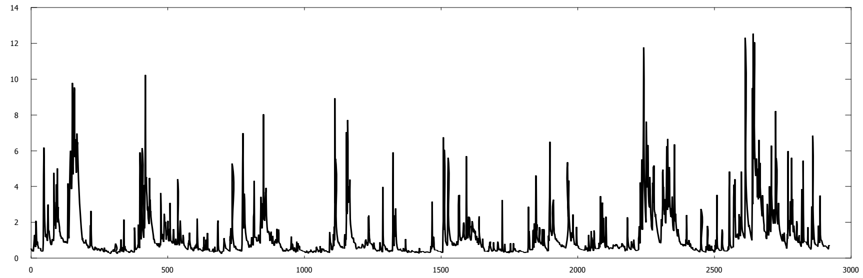


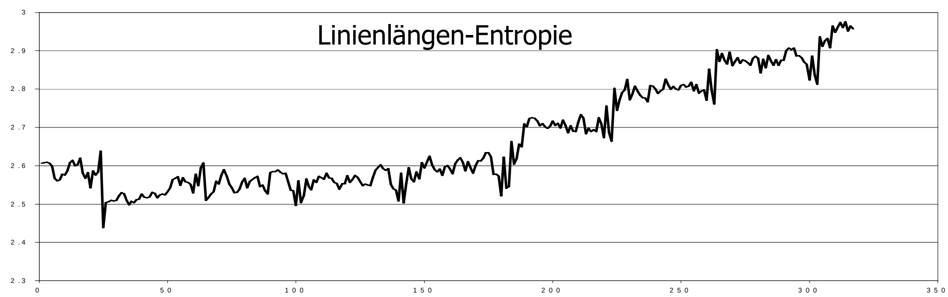
RQA am Beispiel Lehstenbach



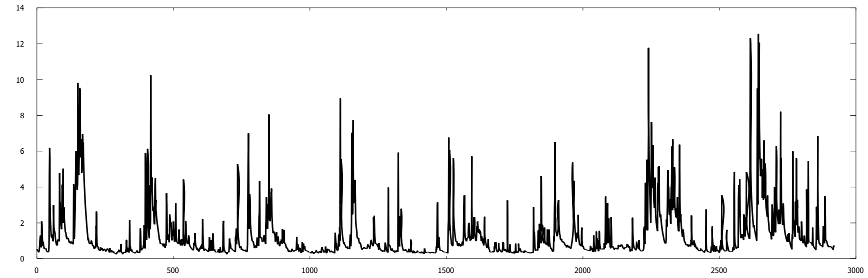


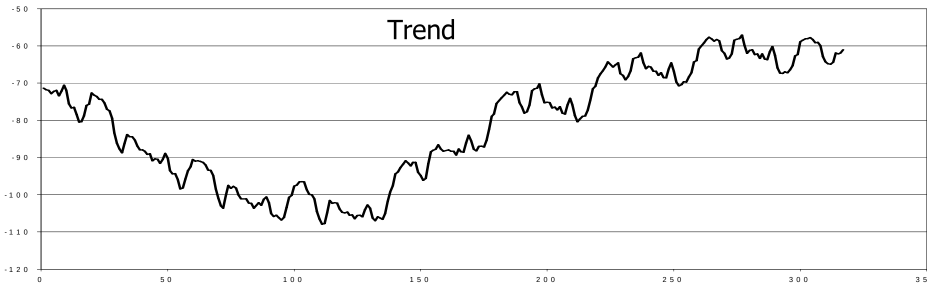
RQA am Beispiel Lehstenbach



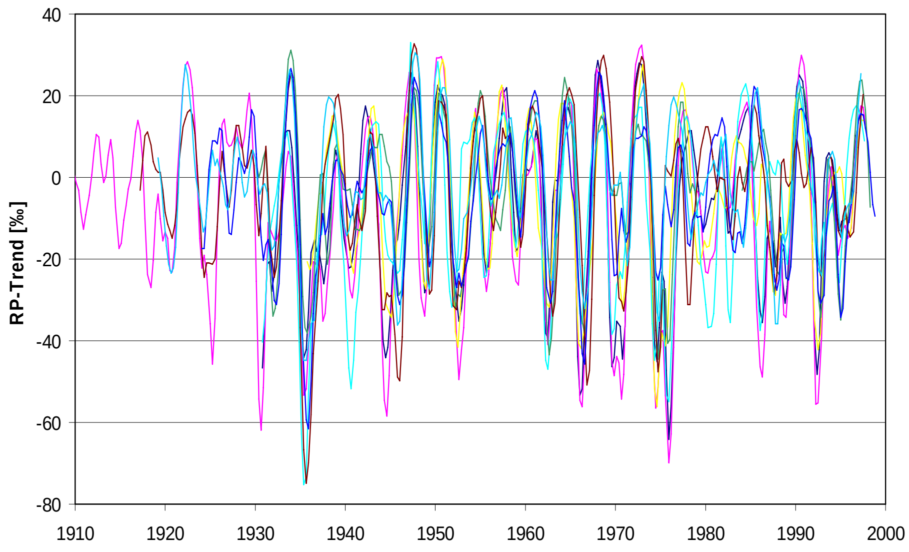


RQA am Beispiel Lehstenbach





RP-Trend für süddeutsche Abflüsse



Aufgabe

1. Erstellen Sie Wiederkehrdiagramme für die 30-Tages-Werte von Niederschlag, Temperatur oder Abfluss, variieren Sie die Einbettungsdimension ($3 \leq m \leq 5$; euklidische Distanz; Verzögerung $\tau = 1$). Nehmen Sie als Schwellenwert ε jeweils das 40. Perzentil der Abstandswerte.

2. Bestimmen Sie anhand der Wiederkehrmatrix die RQA-Werte Wiederkehrrate, Determinismus, und maximale Linienlänge für fünf 2-Jahres-Fenster. Vergleichen Sie die Werte mit der ursprünglichen Zeitreihe.

Singuläre System-Analyse (SSA)

Gesucht:
- ein zeitlokales Maß für unregelmäßige Quasiperiodizitäten („Komponenten")
- Rekonstruktion einzelner Komponenten (= EOFs) (Filter)
- Quantifizierung des Anteils der Varianz, der auf die einzelnen Komponenten entfällt

Ansatz:
- Hauptkomponentenanalyse

Hauptkomponentenanalyse

Prinzip:

- Ausnutzung der Korrelationen zwischen den Variablen x_1, x_2, ... zur Bildung weniger synthetischer Linearkombinationen = ***EOFs*** = ***Hauptkomponenten:***

$$HK_1 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots$$

  die einen möglichst großen Anteil der Varianz erklären

Übliche Anwendung:

- Interpretation der Hauptkomponenten als Einflussfaktoren ("Prozesse")

Mathematisch:

- Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix

Eigenwertzerlegung einer Matrix

Finde einen Vektor ***x***, so dass gilt: $\mathbf{Ax} = \lambda \cdot \mathbf{x}$

d.h.: Das Vektorprodukt der Datenmatrix ***A*** mit dem Vektor ***x*** führt lediglich zu einer Stauchung / Dehnung des resultierenden Vektors, nicht aber zu einer Richtungsänderung

Gegenbeispiel: Rotationsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Eigenwertzerlegung einer Matrix

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ gesucht: $\mathbf{x}$, für das gilt $\mathbf{Ax} = \lambda \cdot \mathbf{x}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2.8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+6 \\ 2+5.6+12 \\ 3+0+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 19.6 \\ 21 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2.8 \\ 3 \end{bmatrix} = 29.57 \cdot \begin{bmatrix} 0.237 \\ 0.663 \\ 0.710 \end{bmatrix}$$

Kovarianz-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(x_1, x_1) & \operatorname{cov}(x_1, x_2) & \dots & \operatorname{cov}(x_1, x_n) \\ \operatorname{cov}(x_2, x_1) & \operatorname{cov}(x_2, x_2) & \dots & \operatorname{cov}(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cov}(x_n, x_1) & \operatorname{cov}(x_n, x_2) & \dots & \operatorname{cov}(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

Eigenwert-Zerlegung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}; \quad \mathbf{v} \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{cov}(x_1,x_1) & \mathrm{cov}(x_1,x_2) & \dots & \mathrm{cov}(x_1,x_n) \\ \mathrm{cov}(x_2,x_1) & \mathrm{cov}(x_2,x_2) & \dots & \mathrm{cov}(x_2,x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(x_n,x_1) & \mathrm{cov}(x_n,x_2) & \dots & \mathrm{cov}(x_n,x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{cov}(x_1,x_1)\cdot v_1 + \mathrm{cov}(x_1,x_2)\cdot v_2 + \dots + \mathrm{cov}(x_1,x_n)\cdot v_n \\ \mathrm{cov}(x_2,x_1)\cdot v_1 + \mathrm{cov}(x_2,x_2)\cdot v_2 + \dots + \mathrm{cov}(x_2,x_n)\cdot v_n \\ \dots \\ \mathrm{cov}(x_n,x_1)\cdot v_1 + \mathrm{cov}(x_n,x_2)\cdot v_2 + \dots + \mathrm{cov}(x_n,x_n)\cdot v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \dots \\ \lambda \cdot v_n \end{bmatrix}$$