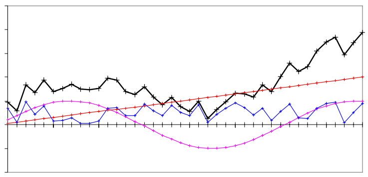
Additive Modelle zur Darstellung einer Zeitreihe

$$X(t) = f(X(t), Y(t)) + S(t) + T(t) + \eta(t)$$



Frequenzraumdarstellung von Zeitreihen

- bisher: Zeitreihen wurden durch ihre Werte dargestellt (Zeitdomäne): $x = x(t)$
- alternativ: Darstellung in einem Funktionenraum-> möglich für jede Funktion in einem n-dimensionalen Vektorraum:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(t) \quad = x(f)$$

c_k: Koeffizienten

ψ_k: Basisfunktionen

- sinnvolle Wahl des Funktionenraums: additiv (Superposition) => ***orthogonale*** Funktionen

Orthogonalsysteme

- Zwei Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ heißen orthogonal, wenn:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\alpha) \quad = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- vergleiche: Orthogonalität = "Unabhängigkeit", "Unkorreliertheit" im statistischen Sinne

=> Veränderung eines Vektor hat keine Auswirkungen auf den anderen Vektor: Superposition

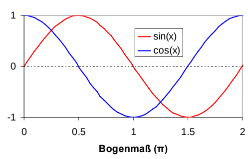
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(t) \cdot \psi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases} \qquad \text{(kontinuierlicher Fall)}$$

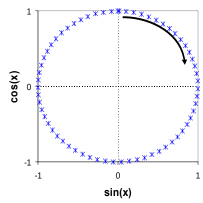
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_i(t_k) \cdot \psi_j^*(t_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases} \qquad \text{(diskreter Fall)}$$

Orthogonalsystem: sin(x), cos(x)

- Wahl von *sin(x)* und *cos(x)* als **Basisfunktionen**

$$\left\{ \sin\left(2\pi \cdot \frac{k}{n} \cdot t\right), \quad \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{n} \cdot t\right): \quad k = 0, 1, ..., [n/2] \right\}$$





Frequenzen, Zeiten, Längen, Perioden, ...

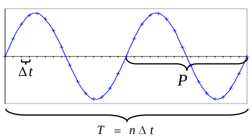
Eine äquidistante Zeitreihe mit Messintervall (Zeitauflösung) Δt und n Werten

Länge der Messperiode $\boxed{T = n \cdot \Delta t}$

Anzahl der Perioden im Datensatz $\boxed{k = T / P_k}$

Periodenlänge $P_k = T / k = 1/f = 2\pi / \omega_k$

Frequenz $\boxed{f_k = \frac{1}{P_k} = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k}{n \cdot \Delta t}}$



$\omega_k = 2\pi / P_k = 2\pi \cdot f_k$

$\omega_k = 2\pi \frac{k}{T} \quad k \in \mathrm{N} \wedge k > 1$

$\omega_{\min} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k_{\min} = 1 \quad P_{\max} = T$

$\omega_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad k_{\max} = n/2 \quad P_{\min} = 2\Delta t$

Frequenzen, Zeiten, Längen, Perioden, ...

Eine äquidistante Zeitreihe mit Messintervall (Zeitauflösung) Δt und n Werten

Länge der Messperiode $\boxed{T = n \cdot \Delta t}$

Anzahl der Perioden im Datensatz $\boxed{k = T / P_k}$

Periodenlänge $P_k = T / k = 1/f = 2\pi / \omega_k$

Frequenz $\boxed{f_k = \frac{1}{P_k} = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k}{n \cdot \Delta t}}$

Kreisfrequenz $\omega_k = 2\pi / P_k = 2\pi \cdot f_k$

harmonische Frequenz $\omega_k = 2\pi \frac{k}{T} \quad k \in \mathrm{N} \wedge k > 1$

Grundfrequenz, Frequenzauflösung $\omega_{\min} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k_{\min} = 1 \quad P_{\max} = T$

Nyquist-Theorem, Abtasttheorem $\omega_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad k_{\max} = n/2 \quad P_{\min} = 2\Delta t$

Orthogonalsystem: sin(x), cos(x)

- Wahl von *sin(x)* und *cos(x)* als **Basisfunktionen**

$$\left\{\sin\left(2\pi\cdot\frac{kt}{n}\right),\quad \cos\left(2\pi\cdot\frac{kt}{n}\right):\quad k=0,1,\ldots,[n/2]\right\}$$

bzw. Darstellung als komplexe Zahl:

$$\left\{e^{i\cdot\left(2\pi\frac{kt}{n}\right)}:-\frac{n}{2}+1\le k\le\frac{n}{2}\right\}$$

Wiederholung: Komplexe Zahlen

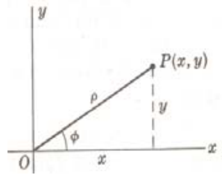
$$z=x+iy=\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z=|z|\,e^{i\varphi}\qquad i^2=-1$$

alternative Darstellung in Polarkoordinaten (φ,ρ):

$$x+i\cdot y=\rho\cdot[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]$$
$$\rho=|x+i\cdot y|\quad=\sqrt{x^2+y^2}$$

Eulersche Gleichung:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$
$$\left|e^{i\varphi}\right|=1$$



Taylorreihendarstellung der trigonometrischen Funktionen

- generell:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)^1}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$$

$$R_n=f^{(n)}(x_0)\frac{(x-a)^n}{n!}\qquad a<x_0<x$$

- für $f(x) = e^x$ und $a = 0$: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$
- analog für $f(x) = e^{ix}$: $\boxed{e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}+\ldots}$
- für $a = 0$: $\sin(x)=$

$i\cdot\sin(x)=$

$i^2=-1$ =>

Exponent ***x***	0	1	2	3	4	5	6	7	8
***i**ˣ* =	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1

Fourieranalyse = harmonische Analyse

J.B.J. Fourier (1807): Jede stetige und periodische Funktion kann (beliebig genau) dargestellt werden als Superposition einer Serie harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen.

=> Entwicklung in eine unendliche trigonometrische Reihe:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}[a_k\cdot\sin(2\pi\frac{kt}{n})+b_k\cdot\cos(2\pi\frac{kt}{n})]$$

Voraussetzungen (= Dirichletsche Bedingungen):

1. Die Funktion muss sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen lassen können, in denen jeweils x stetig und monoton ist.
2. In den Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen) existiert jeweils der links- und der rechtsseitige Grenzwert.

Fourierkoeffizienten

- hier: für periodische, diskrete, äquidistante Zeitreihen mit ***n*** Werten
- Schätzung der Koeffizienten für die ***k***te harmonische Frequenz:

$$a_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x(t_i)\cdot\sin(2\pi\cdot\frac{k}{n}\cdot t_i)$$
$$b_k=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x(t_i)\cdot\cos(2\pi\cdot\frac{k}{n}\cdot t_i)$$

- Ausnahme für $k = n/2$:

$$a_{n/2}=0$$
$$b_{n/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x(t_i)\cdot\cos(2\pi\cdot(n/2)\cdot t)$$

Fouriertransformation

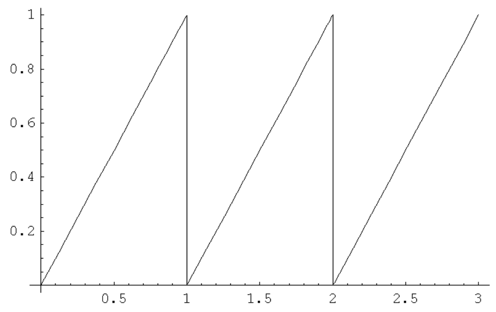
Für unendlich lange Zeitreihen gibt es *alle* Frequenzen

$$f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t_k)e^{-i\omega t}\qquad \textbf{Spektrum}\text{ von } x(t)$$

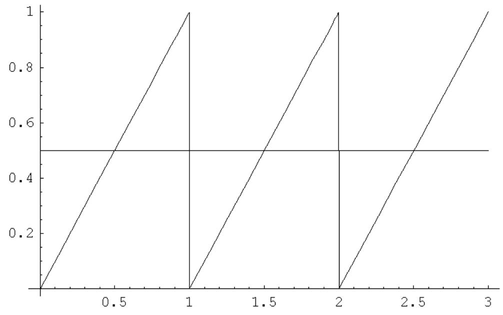
$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Merkmale:
- umkehrbar
- existiert für absolut integrierbare Funktionen
- zeitglobal
- Stationarität prinzipiell erforderlich

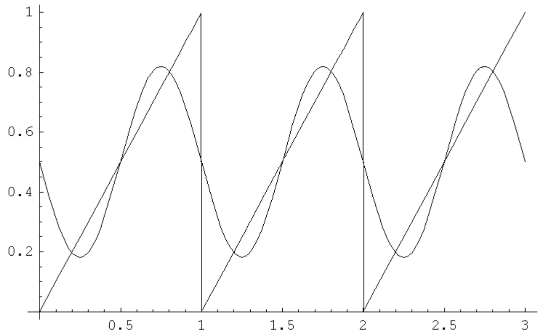
Beispiel für eine Fourierapproximation



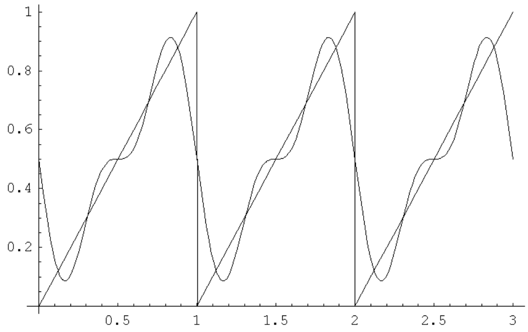
1 Term: Mittelwert



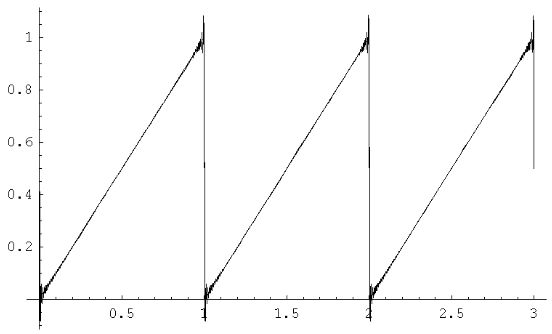
2 Terme



3 Terme



100 Terme



Aufgabe

1. Berechnen Sie ***in Excel*** die Fourierkoeffizienten für den Datensatz in *Aufgabe_Fourieranalyse.xls*.

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i)\cdot\sin(2\pi\cdot\frac{k}{n}\cdot t_i)$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i)\cdot\cos(2\pi\cdot\frac{k}{n}\cdot t_i)$$

2. Rekonstruieren Sie die Zeitreihe als Superposition der entsprechenden *sin-* und *cos-* Funktionen.

   Überprüfen Sie dabei das Parsevalsche Theorem (Verteilung der Gesamtvarianz auf die einzelnen Frequenzen).

3. Führen Sie mit den Daten eine Fourieranalyse in Statistica durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.