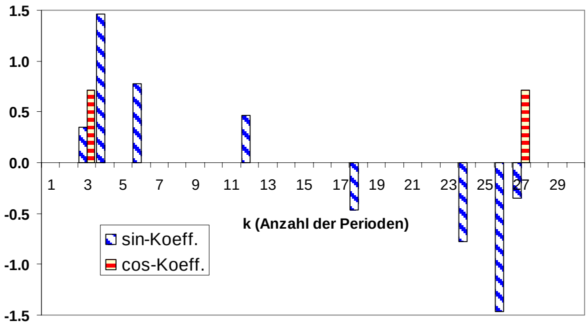
Koeffizienten

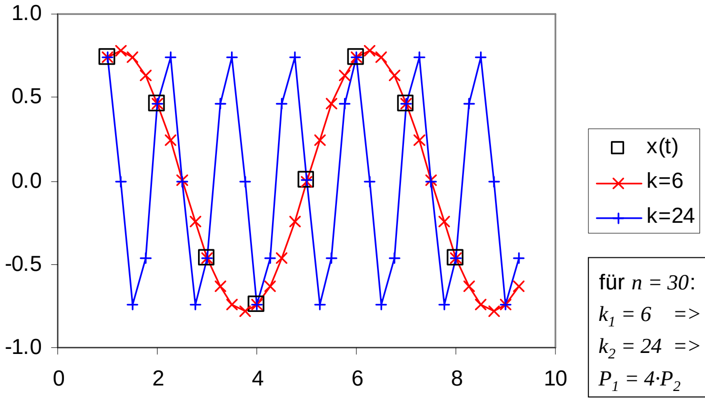


sin-Koeffizienten: $a_k = -a_{(n-k)}$

cos-Koeffizienten: $b_k = b_{(n-k)}$

=> unterschiedliche Periodenlängen liefern z.T. identische Werte: ***Aliasing***

Aliasing jenseits der Nyquist-Frequenz



für $n = 30$:
$k_1 = 6 \quad => P_1 = 30/6 = 5$
$k_2 = 24 \quad => P_2 = 30/24 = 1.25$
$P_1 = 4 \cdot P_2$

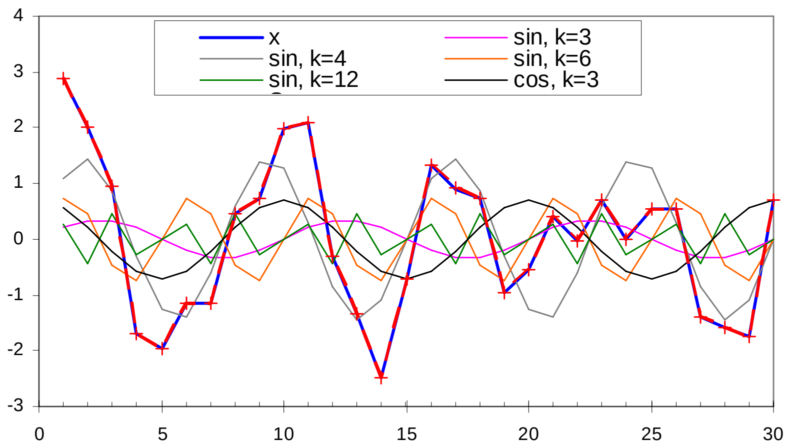
Nyquist-Theorem = Abtasttheorem: $\omega_{\max} = \dfrac{\pi}{\Delta t} \quad k_{\max} = n/2 \quad P_{\min} = 2\Delta t$

Frequenzen, Zeiten, Längen, Perioden, ...

Eine äquidistante Zeitreihe mit Messintervall (Zeitauflösung) Δt und n Werten

Länge der Messperiode	$\boxed{T = n \cdot \Delta t}$	[Z]
Anzahl der Perioden im Datensatz	$\boxed{k = T / P_k}$	[ ]
Periodenlänge	$P_k = T / k = 1/f = 2\pi / \omega_k$	[Z]
Frequenz	$\boxed{f_k = \frac{1}{P_k} = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k}{n \cdot \Delta t}}$	[Z^{-1}]
Kreisfrequenz	$\omega_k = 2\pi / P_k = 2\pi \cdot f_k$	[Z^{-1}]
harmonische Frequenz	$\omega_k = 2\pi \frac{k}{T} \quad k \in \mathbb{N} \wedge k > 1$	[Z^{-1}]
Grundfrequenz, Frequenzauflösung	$\omega_{\min} = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k_{\min} = 1 \quad P_{\max} = T$	
Nyquist-Theorem, Abtasttheorem	$\omega_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad k_{\max} = n/2 \quad P_{\min} = 2\Delta t$	

Rekonstruktion



Fouriertransformation

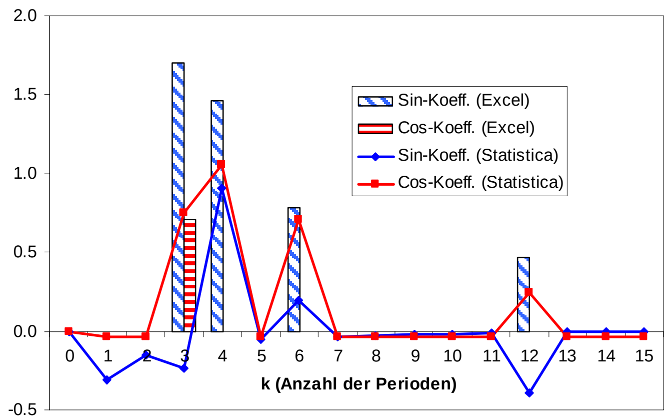
Jede periodische Zeitreihe *x(t)* lässt sich auch im Frequenzraum darstellen:

$$F(k) = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{x_t}{n} \cos\left(2\pi \cdot t \cdot \frac{k}{n} \right) \right) - i \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{x_t}{n} \sin\left(2\pi \cdot t \cdot \frac{k}{n} \right) \right)$$

=> Verwendung der selektiven Fouriertransformation als Filter:

- Tiefpassfilterung: Eliminieren der hochfrequenten Anteile
- Hochpassfilterung: Eliminieren der niederfrequenten Anteile
- Bandpassfilterung: Eliminierung aller Anteile außerhalb eines bestimmten Frequenzbereiches

Bestimmte Koeffizienten



Fast Fourier Transformation (FFT)

- Numerisch schnelles numerisches Verfahren
- für $n = 2^p$ Werte:

  lediglich $p \cdot n = p \cdot 2^p$ statt $n^2 = 2^{2p}$ Multiplikationen erforderlich
- Prinzip:

  Die diskrete Fourier-Transformation eines Datensatzes der Länge n

  ist gleich

  der Summe der beiden diskreten Fouriertransformationen der Länge *n/2* (getrennt für geradzahlige und ungeradzahlige t)

Fast Fourier Transformation (FFT)

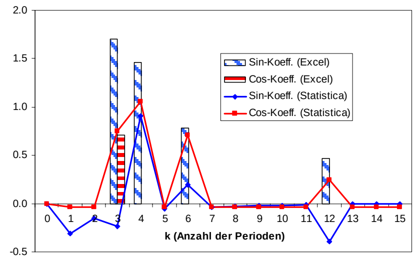
$$
\begin{aligned}
F(k) &= \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi ijk/n} f_j \\
&= \sum_{j=0}^{n/2-1} e^{2\pi ik(2j)/n} f_{2j} + \sum_{j=0}^{n/2-1} e^{2\pi ik(2j+1)/n} f_{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n/2-1} e^{2\pi ikj/(n/2)} f_{2j} + W^k \sum_{j=0}^{n/2-1} e^{2\pi ikj/(n/2)} f_{2j+1} \\
&= F_k^g + W^k \cdot F_k^u
\end{aligned}
$$

$$W = e^{2\pi i/n}$$

Index g: für geradzahlige t

Index u: für ungeradzahlige t

Leakage

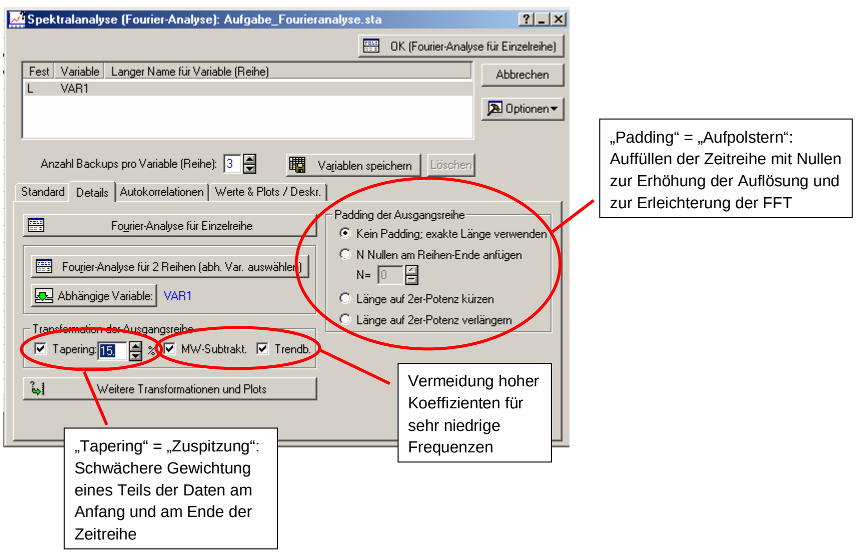


Leakage = „Einsickern“ einer Frequenz in benachbarte Frequenzen

Gegenmaßnahmen:

1. Erhöhung der Abtastrate durch ***Padding*** („Polstern“) = Auffüllen der Zeitreihe mit Nullen
2. Gewichtung der Daten am Anfang und Ende der Zeitreihe durch ***Tapering*** („Zuspitzung“)
3. ***Glättung*** des Periodogramms -> Spektrale Dichte

Datentransformation



Parsevalsches Theorem

Die totale Varianz der Werte ist gleich der Summe der Varianzen der einzelnen Frequenzen:

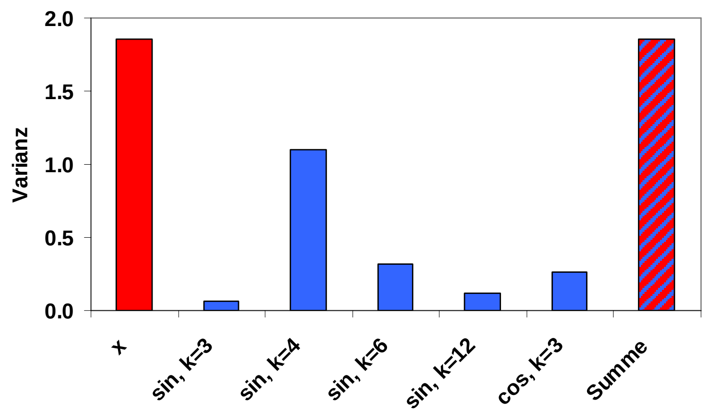
$$\sigma^2(x) = \sum_{k=1}^{n/2} \sigma_k^2(x)$$

$\rightarrow$ Energie ist im Zeit- und Frequenzraum gleich

Definition - Energie eines Signals: $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(t_k)|^2$

(*Beachte: keine Entsprechung in der Zeitdomäne!*)

Varianzen der Rekonstruktion



Periodogramm

- zur Bestimmung der Aufteilung der Varianz auf die einzelnen Frequenzen bzw. Periodenlängen

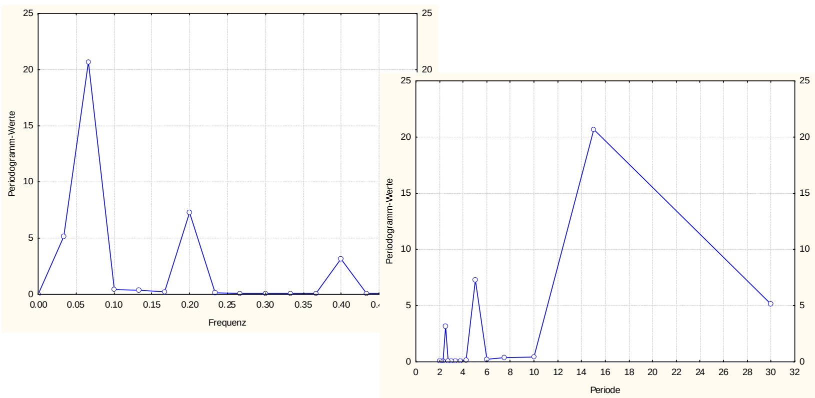
- Berechnung anhand der Fourier-Koeffizienten:

$$I(\omega_k) = \left(a_k^2 + b_k^2\right) \cdot \frac{n}{2}$$

- oft: Summe auf 1 normiert => entspricht Anteil der Varianz, der durch einzelne Frequenz erklärt wird

Periodogramm

= Darstellung der Varianzanteile für die einzelnen Frequenzen bzw. Phasenlängen



Kumulatives Periodogramm

Periodogramm: $$I(\omega_k) = \left(a_k^2 + b_k^2\right) \cdot \frac{n}{2}$$

Kumulatives Periodogramm:
(*normiert auf Summe = 1*)

$$S(\omega_k) = \sum_{l=1}^{k} I(\omega_l) / \sum_{l=1}^{n/2} I(\omega_l)$$

Bei weissem Rauschen: gerade Linie von (0,0) nach (π, 1)

=> Signifikanztest gegen weißes Rauschen!

ε -Signifikanz: Senkrechter Abstand zur Geraden:

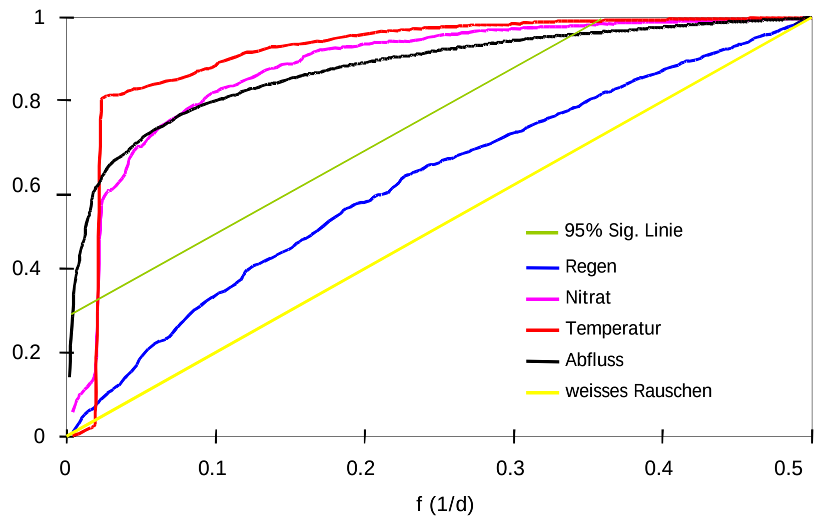
$$CI = \pm \frac{d_\varepsilon}{\sqrt{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}$$

mit

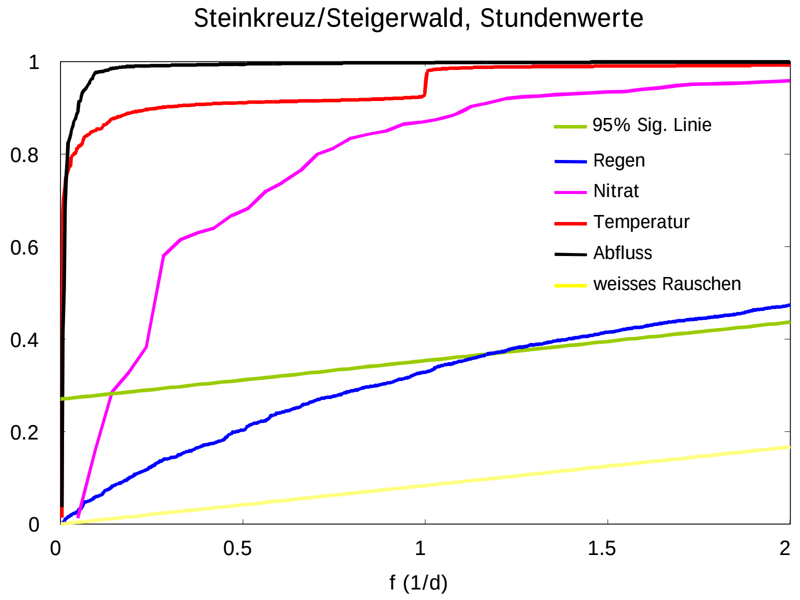
ε	0,01	0,05	0,10	0,25
d_ε	1,63	1,36	1,22	1,02

Kumulatives Periodogramm: Beispiel

Lehstenbach/Fichtelgebirge, Tageswerte



Kumulatives Periodogramm: Beispiel



Periodogramm als Schätzer

Periodogramm als Schätzer für das Spektrum des die Zeitreihe erzeugende Prozesses:

- ***positiv***: Erwartungswert des Periodogramms konvergiert mit zunehmender Länge der Zeitreihe
- ***negativ***: die Varianz des Schätzers nimmt ***nicht*** mit zunehmender Länge des Datensatzes ab, da neu hinzukommende Information in die Verwendung von mehr Fourier-Stützstellen, und nicht in die Verringerung der Varianz an den einzelnen Stützstellen fließt:
  - Erhöhung der Abtastrate => Verschiebung der Nyquist-Frequenz, d.h., Erfassung neuer Spektralanteile
  - Verlängerung der Zeitreihe bei gleicher Abtastbreite => dichtere Verteilung der gleichbleibend ungenauen Schätzwerte.

=> verläßlichere Spektralschätzer zur Schätzung des der Zeitreihe zugrunde liegenden Prozeßspektrums gesucht

Endliches weißes Rauschen

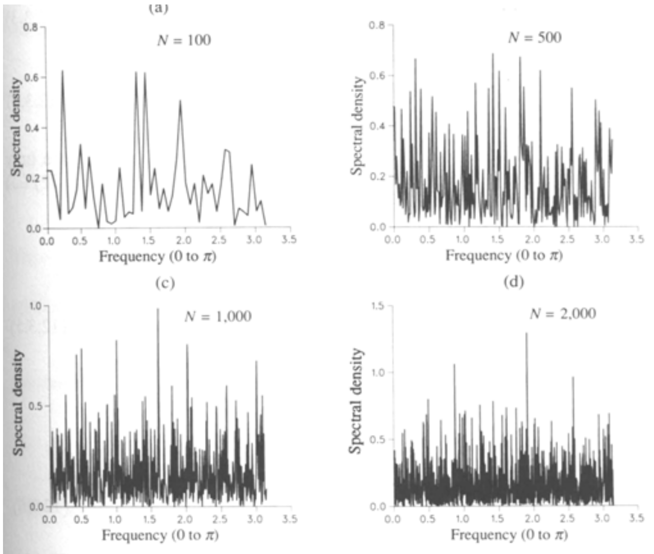


Fig. 12.2 Sample spectrum of a white noise process.

Powerspektrum und Varianz

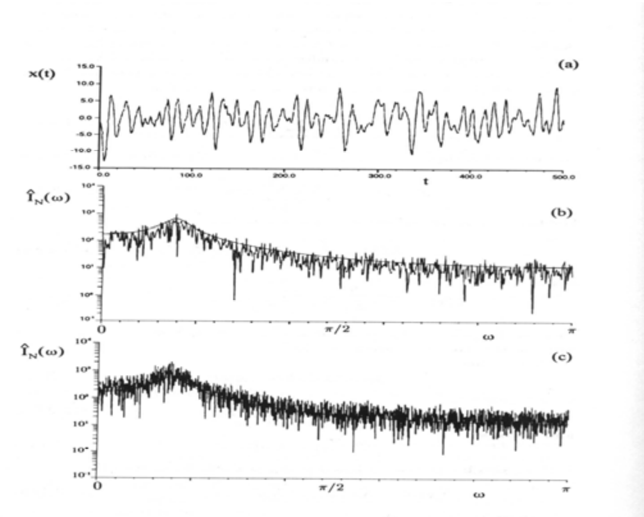


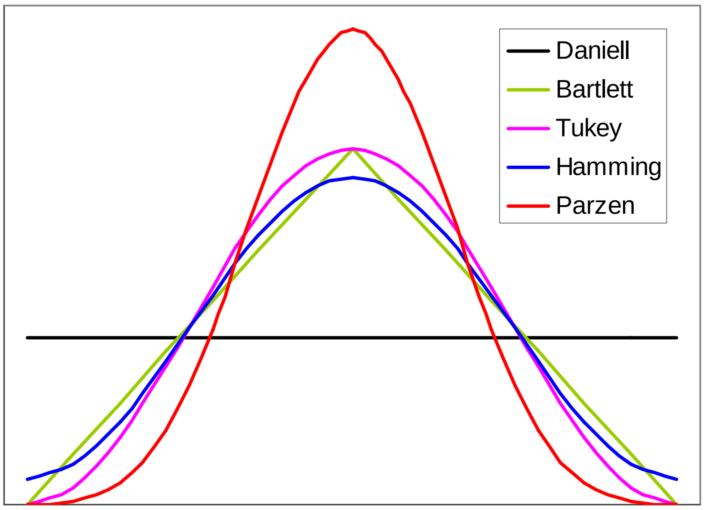
Figure 13.11: Time series (a) and periodograms of an AR(2) process (b) with $N = 1024$ in the time series, and (c) with $N = 4096$. The solid curve represents the exact spectrum. The fluctuations do not abate with increasing N.

Spektogramm

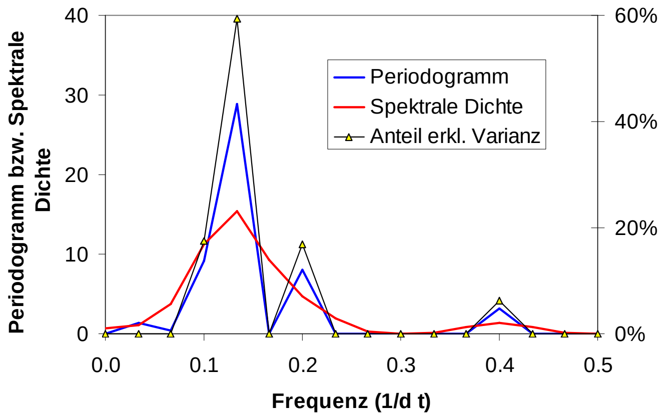
= Darstellung der Spektraldichten

- erfordert in der Regel eine Glättung des Periodogramms zur Verringerung von Bias und Varianz und zur Erhöhung der Stabilität der Schätzer
- Glättung erfolgt i.d.R. über Fenstertechniken = stückweise Gewichtung der Daten
  - in der Zeitdomäne: Bartlett-Fenster
  - in der Frequenzdomäne: Daniell-, Tukey-Hanning-, Hamming-, Parzen-Fenster

Typische Spektralschätzer: Versatzfenster



Beispiel: letzte Aufgabe



Fenster: Hamming

Aufgabe

1. Überprüfen Sie dabei das Parsevalsche Theorem, indem Sie die Varianz der Zeitreihe in *Aufgabe_Fourieranalyse.xls* mit der Summe der Varianzen der einzelnen rekonstruierten Basisfunktionen vergleichen.
2. Vergleichen Sie das kumulative Periodogramm für den Datensatz mit der kumulierten Varianz der rekonstruierten Basisfunktionen.
3. Erstellen Sie die Periodogramme für den Datensatz *Datensatz.xls*.
4. Bestimmen Sie jeweils die drei wichtigsten Frequenzen und führen Sie damit eine Bandpassfilterung durch. Welcher Anteil der Varianz der ursprünglichen Zeitreihe wird dadurch rekonstruiert?