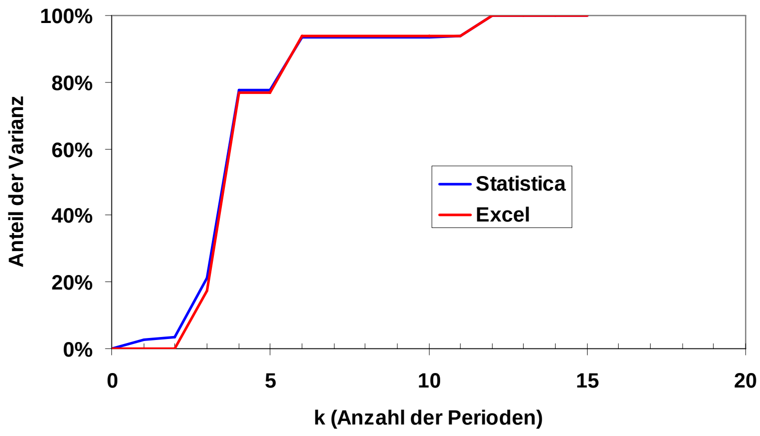
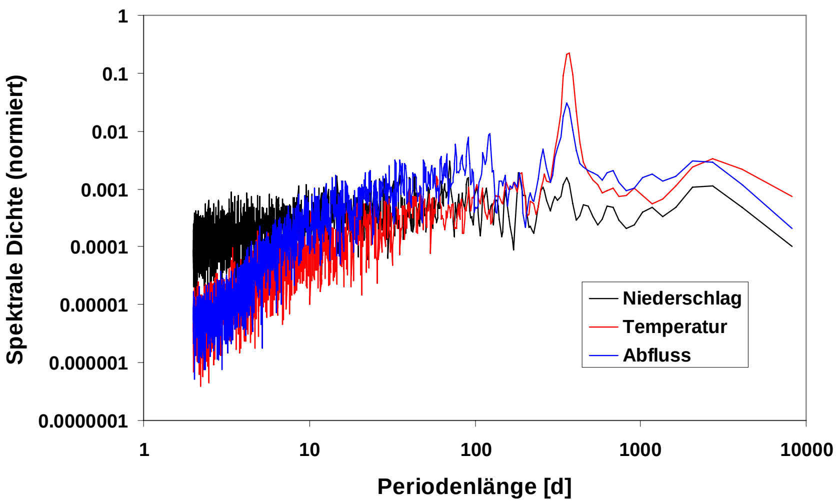
Aufgabe

1. Überprüfen Sie dabei das Parsevalsche Theorem, indem Sie die Varianz der Zeitreihe in *Aufgabe_Fourieranalyse.xls* mit der Summe der Varianzen der einzelnen rekonstruierten Basisfunktionen vergleichen.
2. Vergleichen Sie das kumulative Periodogramm für den Datensatz mit der kumulierten Varianz der rekonstruierten Basisfunktionen.
3. Erstellen Sie die Periodogramme für den Datensatz *Datensatz.xls*.
4. Bestimmen Sie jeweils die drei wichtigsten Frequenzen und führen Sie damit eine Bandpassfilterung durch. Welcher Anteil der Varianz der ursprünglichen Zeitreihe wird dadurch rekonstruiert?

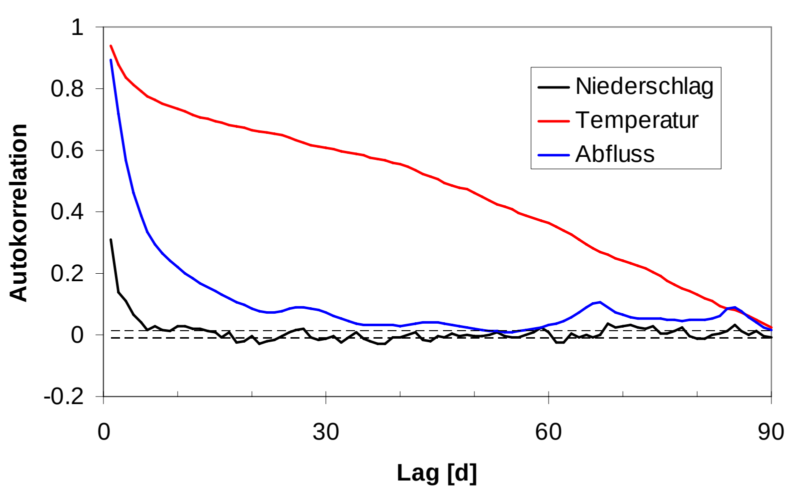
Aufgabe 2: Kumulatives Periodiogramm



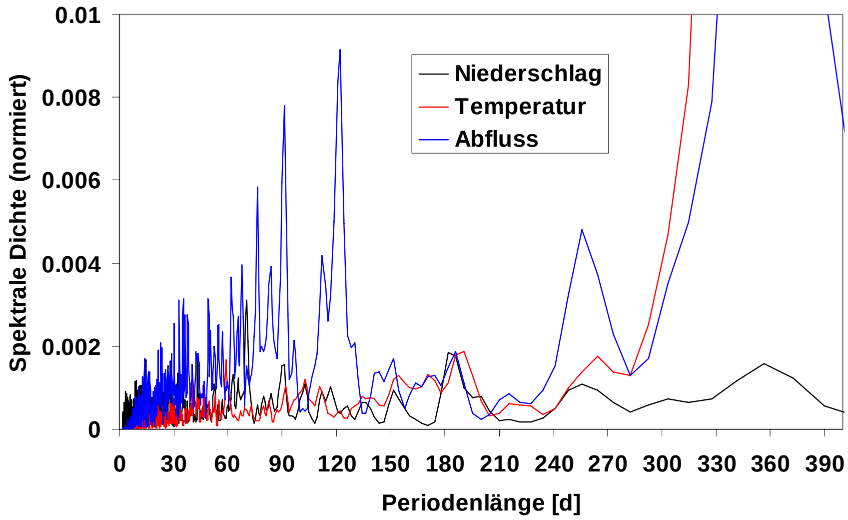
Aufgabe 3:
Spektrale Dichten



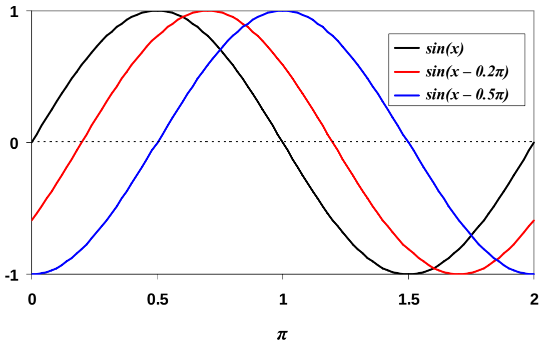
Zum Vergleich:
Autokorrelation

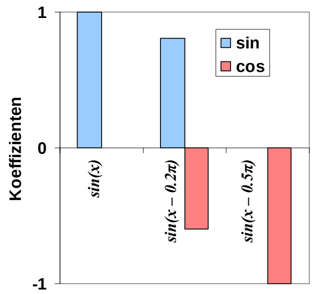


Aufgabe 3:
Spektrale Dichten



Phasen-Information





Powerspektrum

- „Power" -> Energie
- = Verallgemeinerung der Spektralanalyse für nicht-periodische, endliche (und diskrete) Funktionen
- keine Beschränkung auf harmonische Frequenzen
- analog zu Periodogramm/spektrale Dichte: ***Phaseninformation*** geht verloren
- methodisch: fensterweise Durchführung einer Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion

- übliche Darstellung: log-log-Plot des Leistungsspektrums ($\rightarrow$ 'power-law' Charakteristik)

Faltungstheorem und Autokorrelation

Faltung zweier Funktionen:

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(\tau - t) dt$$

Fouriertransformierte einer Funktionenfaltung:

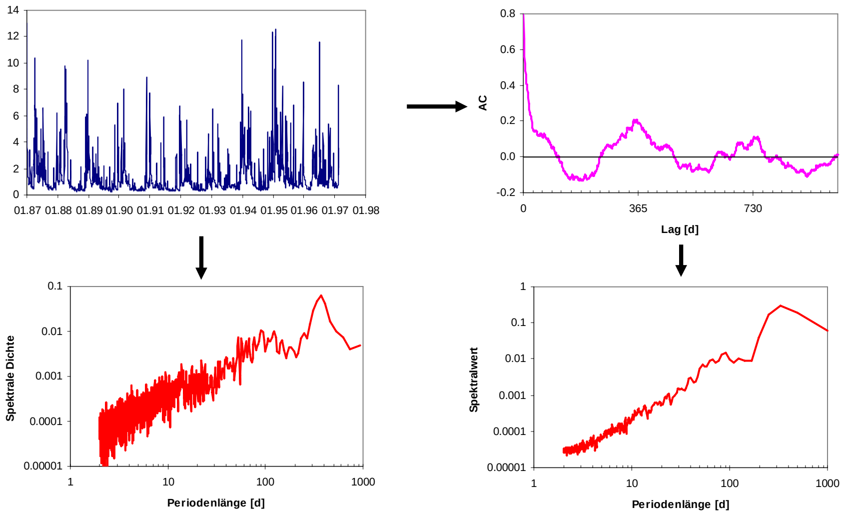
$$h(\omega) = f(\omega) g(\omega)$$ -> Faltungstheorem

Anwendung:

Das Leistungsspektrum (= Energiedichte-Spektrum) einer Zeitreihe ist die Fouriertransformierte ihrer Autokorrelation (*Wiener-Khintchin-Theorem*)

Powerspektrum

= Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion



Bestimmung des Powerspektrums

$$Sp(0) = \frac{1}{2M}\left[\rho^2(0) + \sum_{k=1}^{M-1} D(k)\cdot\rho^2(k)\right] \qquad \text{für } h = 0$$

$$Sp(h) = \frac{1}{M}\left[\rho^2(0) + \sum_{k=1}^{M-1} D(k)\cdot\rho^2(k)\cdot\cos\frac{\eta h k}{M}\right] \qquad \text{für } 0 < h < M$$

$$Sp(M) = \frac{1}{2M}\left[\rho^2(0) + \sum_{k=1}^{M-1} D(k)\cdot\rho^2(k)\cdot(-1)^k\right] \qquad \text{für } h = M$$

mit

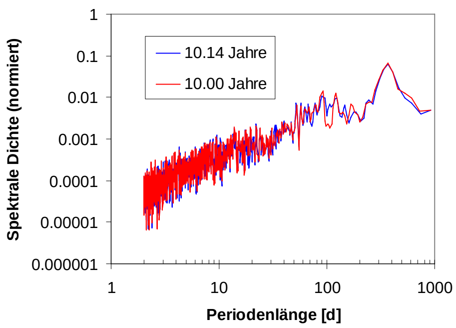
mit	ρ:	Autokorrelationswert
	η:	
	h:	Verschiebung (Time Lag) der Autokorrelationsfunktion
	M:	maximale Verschiebung der Autokorrelationsfunktion ($M \le n/4$)
	$D(k)$	"Fenster", z.B. *Hamming Window:*

$$D(k) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\frac{\pi k}{M}\right) \qquad \text{für} \quad 0 < k < M$$

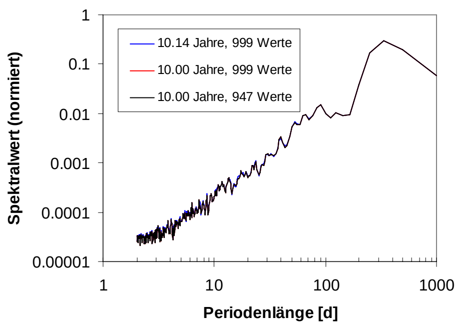
Spektrale Dichte vs. Powerspektrum

Lehstenbach-Abfluss, ab 1.1.1988

Spektrale Dichte



Powerspektrum



Frequenzauflösung

	Periodogramm	**Powerspektrum**
Minimale Frequenz	$\frac{1}{n \cdot \Delta t}$	$\frac{1}{2 \cdot M \cdot \Delta t}$
		$= \frac{1}{2 \cdot (n/4) \cdot \Delta t} = \frac{2}{n \cdot \Delta t}$
Maximale Frequenz (Nyquist-Frequenz)	$\frac{1}{2 \cdot \Delta t}$	$\frac{1}{2 \cdot \Delta t}$

Farbiges Rauschen

→ Klassifizierung nach Steigung β der an den abfallenden Ast der Kurve im doppelt-logarithmischen Plot gefitteten Gerade

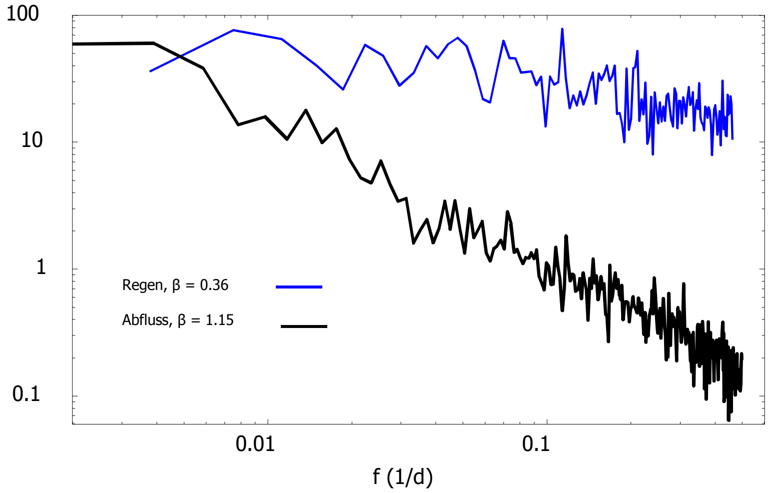
$\beta = 0$ → **weißes Rauschen**: ohne jegliche Struktur, frequenzunabhängige spektrale Energiedichte

1/f Rauschen: spektrale Dichte umgekehrt proportional zur Frequenz (1/f Rauschen i.e.S. = rosa Rauschen: $\beta = 1$ *bzw.* $0{,}5 < \beta < 1{,}5$)

$0 < \beta < 1$ → **rotes Rauschen**: größere Varianz der langperiodischen (niederfrequenten) Anteile => ***Tiefpassfilter***, autokorrelierte Daten ("Trägheit")

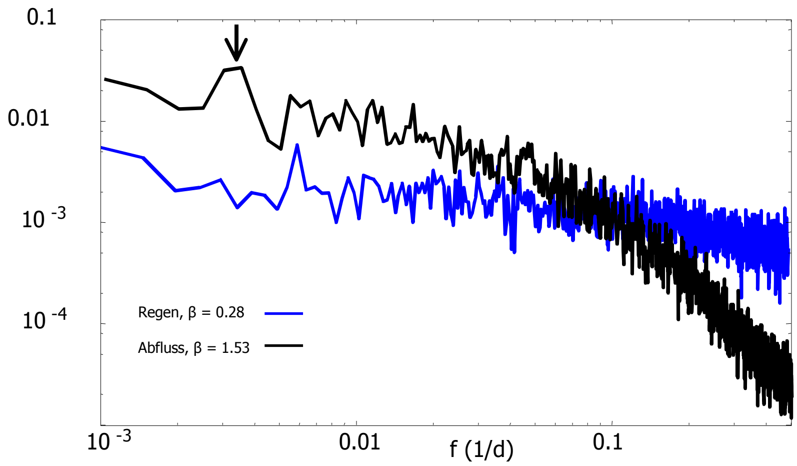
$-1 < \beta < 0$ → **blaues Rauschen**: größere Varianz der kurzperiodischen (hochfrequenten) Anteile => ***Hochpassfilter***

Beispiele für Powerspektren I



Lehstenbach/Fichtelgebirge

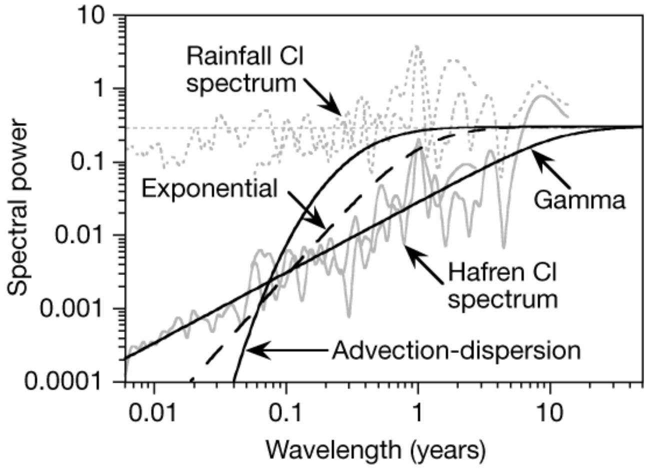
Beispiele für Powerspektren II



Lange Bramke/Harz

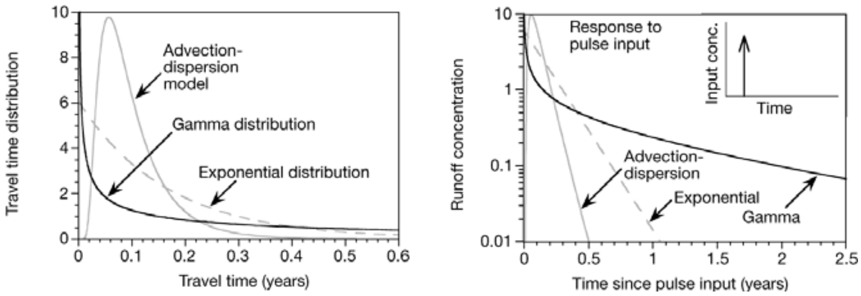
Beispiel:
Cl im Abfluss kleiner Einzugsgebiete

(Kirchner et al. 2000)



Beispiel: Cl im Abfluss kleiner Einzugsgebiete

(Kirchner et al. 2000)



Powerspektren für nicht-äquidistante Daten: Lomb-Scargle-Normalisierung

Messungen der Zeitreihe zu beliebigen Zeitpunkten t_j:

$$P_{LS}(\omega) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\left[\sum_{j=1}^{N} x_j \cos\left(\omega\left(t_j - \tau\right)\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{N} \cos^2\left(\omega\left(t_j - \tau\right)\right)} + \frac{\left[\sum_{j=1}^{N} x_j \sin\left(\omega\left(t_j - \tau\right)\right)\right]^2}{\sum_{j=1}^{N} \sin^2\left(\omega\left(t_j - \tau\right)\right)} \right\}$$

für

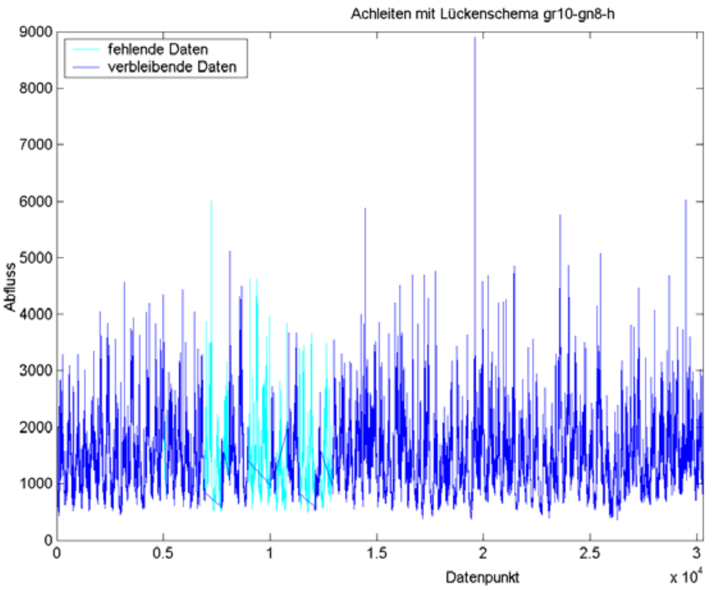
$$\bar{x} = E(x) = 0$$
$$\sigma(x)^2 = 1$$

und

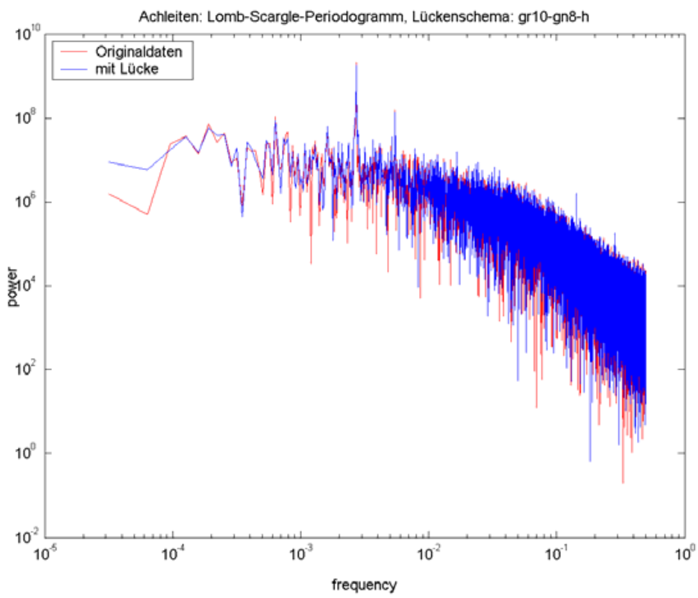
$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \sin\left(2\omega t_j\right)}{\sum_{j=1}^{N} \cos\left(2\omega t_j\right)} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{2\varpi} \cdot \arctan\left(\frac{\sum_{j=1}^{N} \sin(2\varpi t_j)}{\sum_{j=1}^{N} \cos(2\varpi t_j)} \right)$$

= beste (im least squares-Sinne) Approximation

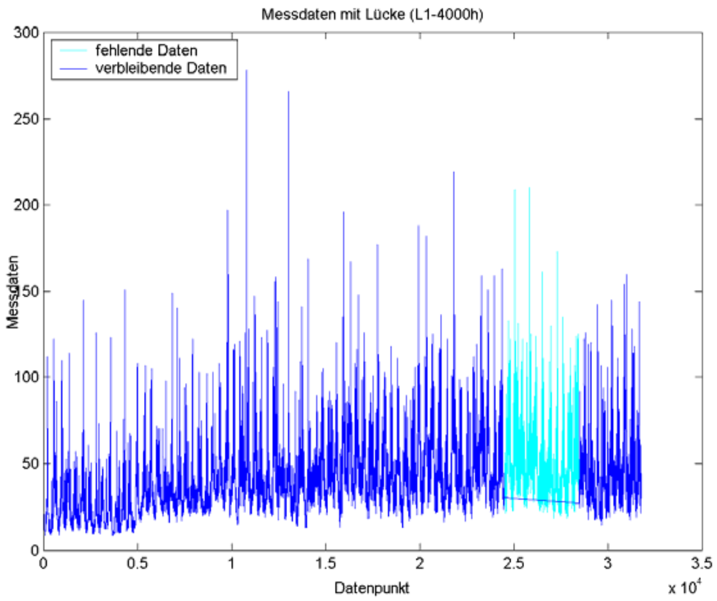
Ein ziemlich lückiger Datensatz...



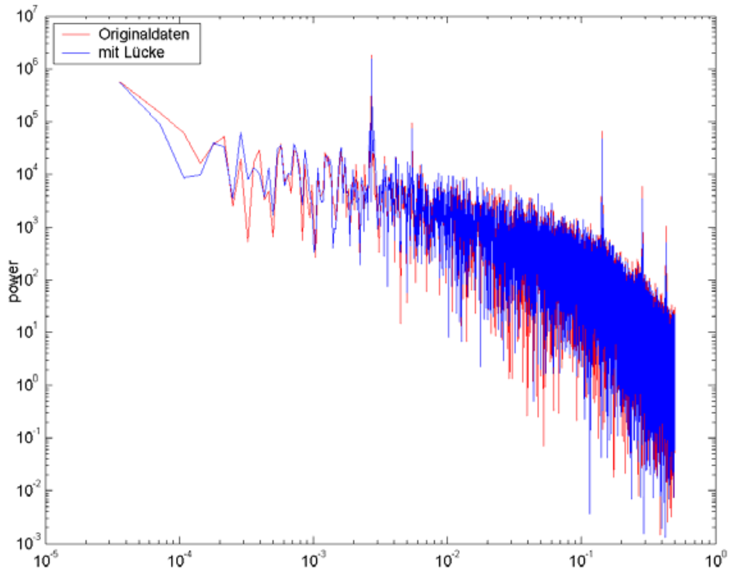
...und sein Spektrum



Beispiel: Abflusspegel mit großer Lücke



Lomb-Scargle-Spektrum im Vergleich



Ausblick auf weitere Fouriermethoden

- Multivariate Fouriertransformationen
- Kreuz-Spektren (Kohärenz zwischen zwei Zeitreihen)
- Skalierung, Potenzgesetze
- Behandlung langreichweitiger Spektren
- Zeitlokale Spektren: Zeit-Frequenz-Diagramme, Wavelets

Aufgabe

1. Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktionen für die drei Paremeter des Files *Datensatz.xls*.

2. Vergleichen Sie für jeden Parameter die spektrale Dichte der jeweiligen Autokorrelationsfunktion (= Powerspektrum) mit der direkt am Datensatz bestimmten.

3. Bestimmen Sie die Steigung des Powerspektrums (Werte gegen Frequenz aufgetragen) für jeden Parameter.