Lokale Frequenzanalyse

- Fourieranalyse bzw. Powerspektrum liefern ***globale*** Maße für einen Datensatz (mittleres Verhalten über die gesamte Länge des Datensatzes)
- Wiederkehrdiagramme zeigten, dass Periodizitäten in natürlichen Datzensätzen mittelfristig schwanken

=> wünschenswert wäre ein Verfahren für ***lokale*** Frequenzanalysen

möglicher Ansatz: Die fensterweise Durchführung einer Fourieranalyse.

Dies ist allerdings

- **ungenau**: Aliasing von hoch- und niederfrequenten Anteilen, die nicht im Fenster enthalten sind
- **ineffizient**: Duchführung der Analysen separat für verschiedene Frequenzen und verschiedene Fensterlängen

Fourier- vs. Wavelet-Analyse

Wavelet-Transformation um 1980 von Jean Morlet und Alex Grossmann entwickelt

	Fourier	**Wavelet**
Bestimmung der Korrelation mit	"Wellen" (sin, cos)	"Wellchen"
Charakterisierung	global	lokal
zusammengesetzt aus	orthogonalen Basisfunktionen	"Mutter-Wavelets" (Basis-Wavelets)

Bestimmung der Koeffizienten: Faltung

Faltung zweier Funktionen: $h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(\tau - t) dt$

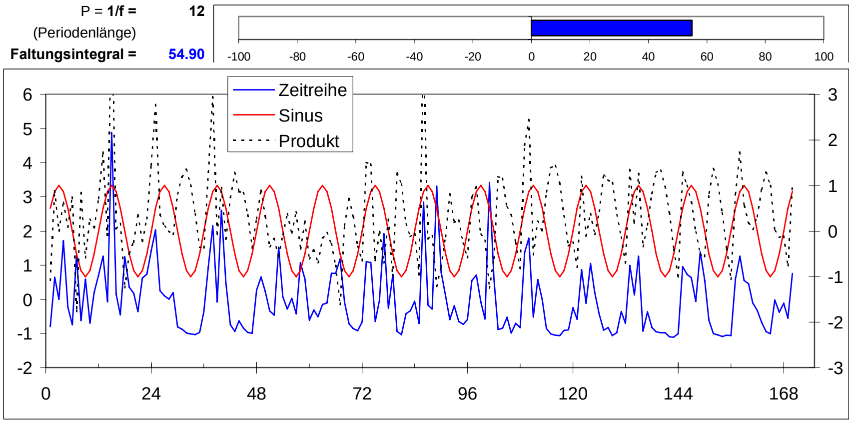
zum Vergleich:

Bestimmung der Kovarianz: $\mathrm{cov}_{x,y} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left((x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \right)$

orthogonale Funktionen: $\mathrm{cov}_{x,y} = 0$

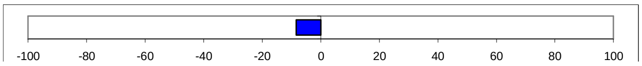
Bestimmung der Fourierkoeffizienten: $a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \left(\sin(2\pi \cdot \frac{k}{N} \cdot t_i) \right)$

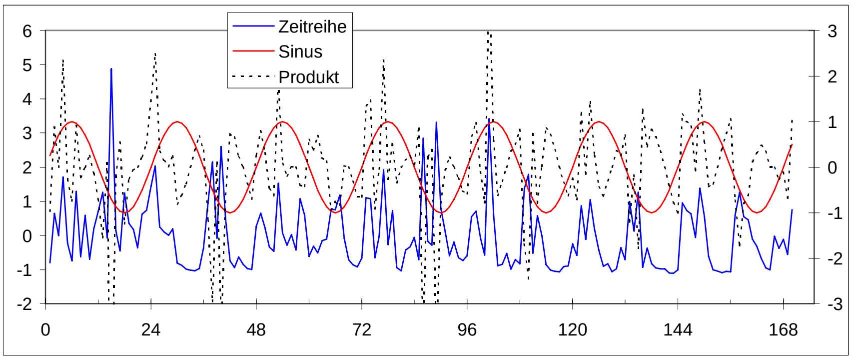
Fourier- Analyse



Fourier- Analyse

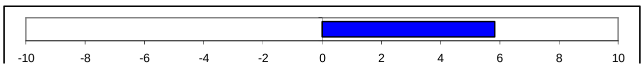
P = **1/f** = **24**
(Periodenlänge)
Faltungsintegral = **-8.43**

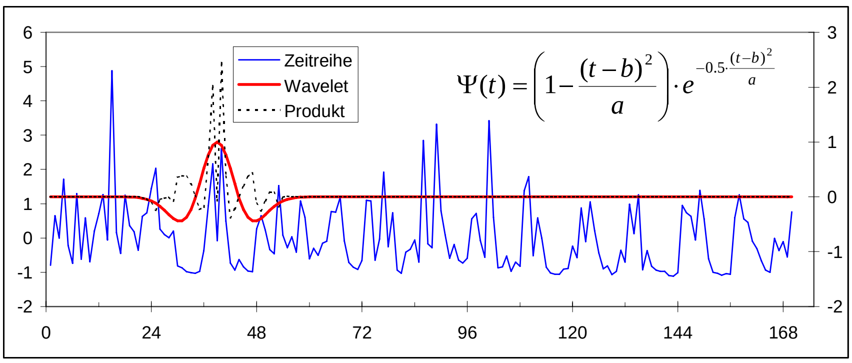




Wavelet- Analyse

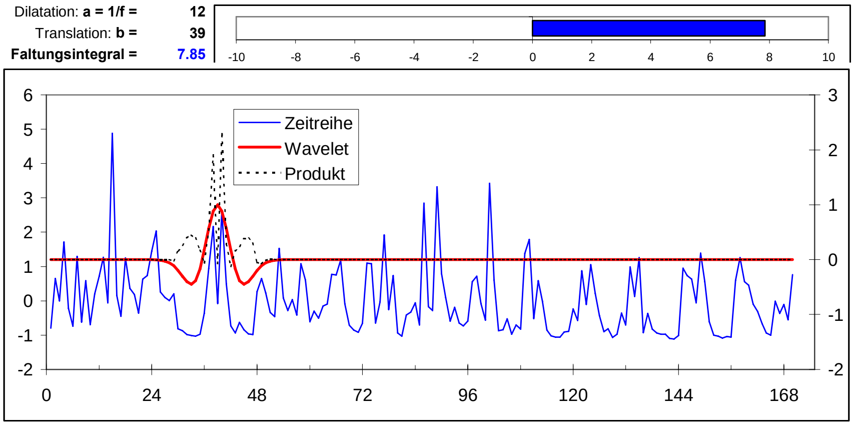
Dilatation: **a** = **1/f** = **24**
Translation: **b** = **39**
Faltungsintegral = **5.83**





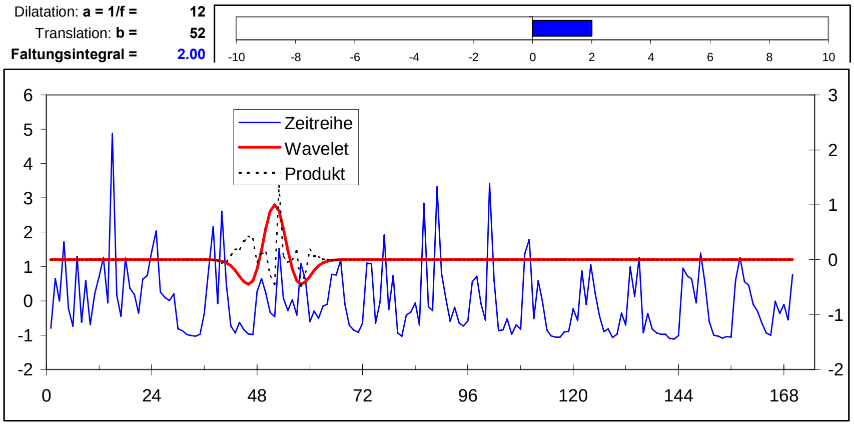
Wavelet- Analyse

Dilatation: **a = 1/f =** **12**
Translation: **b =** **39**
Faltungsintegral = **7.85**



Wavelet- Analyse

Dilatation: **a = 1/f =** **12**
Translation: **b =** **52**
Faltungsintegral = **2.00**



Wavelet-Transformation

Wavelettransformation → Multiplikation mit der Wavelet-Funktion:

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \Psi_{a,b}(t)\, dt$$

Zwei Variablen:

- ***a***: Skalenparameter (Stauchung/Streckung entlang der Zeitachse = ***Dilatation***): zugehörige Frequenz *f = 1/a*
- ***b***: Verschiebeparameter (entlang der Zeitachse; = ***Translation***)

Skalierungseigenschaft:

$$T(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \Psi_{1,0}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Kontinuierliche vs. Diskrete Wavelet-Transformation

Kontinuierliche Wavelet-Transformation:

$$CWT(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \Psi_{a,b}(t)\, dt$$

Diskrete Wavelet-Transformation:

$$DWT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_t x(t) \cdot \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- Bestimmung der Wavelets für diskrete a und b, wobei:

$a = a_0^m \quad b = k \cdot b_0 a_0^m \qquad a_0 > 0; \quad b_0 \neq 0$

- meist: $a_0 = 2$ und $b_0 = 1$ (Kompromiss zwischen Auflösung und Redundanz)

=> $a = 2^m \quad b = k \cdot 2^m$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$

Kontinuierliche vs. Diskrete Wavelet-Transformation

	kontinuierlich	**diskret**
Überlappung	stark	gering - keine
Redundanz	hoch	gering - keine
Mutter-Wavelet	nicht orthogonal	orthogonal möglich (Basis-Wavelet)
Rechenaufwand	hoch	gering

Eigenschaften von (Mutter-)Wavelets

- Integrierbar und normiert: $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)\, dt = 0$
- Mittelwert = 0: $\overline{\Psi}(t) = 0$
- lokal in der Zeitdomäne (begrenzter ***Träger*** = ***Support***)
- lokal in der Frequenzdomäne
- Normalisierung jeweils auf Energie = 1 $\hat{\Psi}(s\varpi_k) = \sqrt{\frac{2\pi s}{\delta t}} \cdot \hat{\Psi}_0(s\varpi_k)$

Basis-Wavelets:
- = orthogonale Mutter-Wavelets
- nur für diskrete Wavelet-Transformationen

Morlet Mutter-Wavelet

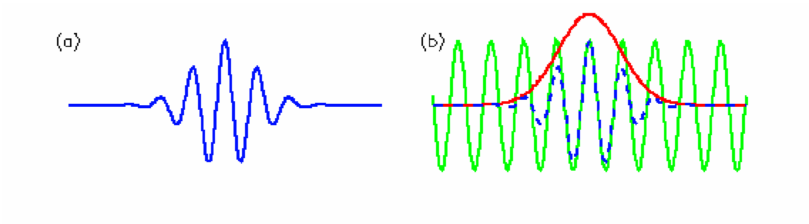


Fig 2.

(a) Morlet wavelet of arbitrary width and amplitude, with time along the x-axis. (b) Construction of the Morlet wavelet (blue dashed) as a Sine curve (green) modulated by a Gaussian (red).

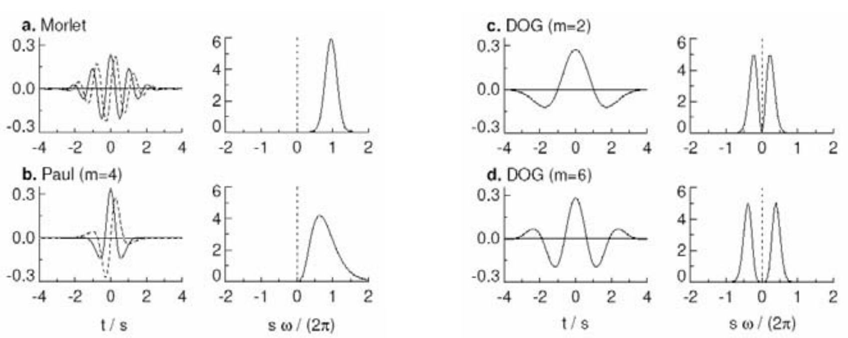
(http://paos.colorado.edu/research/wavelets/wavelet2.html)

$$\Psi_0(t) = \pi^{-1/4} e^{i\varpi_0 t} e^{-t^2/2}$$

ω_0: Wavenumber = Anzahl der Oszillationen im Wavelet

Verschiedene Mutter-Wavelets

Zeitdomäne ψ **(t/s)** | **Frequenzdomäne** ψ_f **($s\,\omega$)** | **Zeitdomäne** ψ **(t/s)** | **Frequenzdomäne** ψ_f **($s\,\omega$)**



—— Real-Teil
- - - Imaginär-Teil

(Torrence und Compo 1998)

DOG = "Derivative of a Gaussian"
= ***m***-te Ableitung der Normalverteilungskurve
= "**Mexican Hat**" für ***m = 2***

Wahl der Mutter-Wavelets

Kriterien:

1. **Orthogonale oder nicht-orthogonale Funktionen**

   Orthogonal: Anzahl der Faltungen für jede Skalierung proportional zur Weite der Wavelet-Funktion => sinnvoll für ***diskrete*** Wavelet-Analyse (Basis-Wavelet)

   Nicht-orthogonale Funktionen sind besser geeignet für nicht streng periodische Zeitreihen (***kontinuierliche*** Wavelet-Analyse), aber hochgradig redundant für große Skalen

2. **Komplexe oder reellwertige Funktionen**

   Reellwertige Funktionen liefert keine Informationen über die Phase (z.B. DOG)

3. **Skalierung (Dilatation)**

   Geringe Weite in der Zeitdomäne ergibt eine hohe Auflösung in der Zeitdomäne, aber eine schlechte Auflösung in der Frequenzdomäne, und umgekehrt.

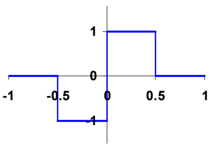
4. **Form**

   Prinzipiell entsprechend der "Form" der Zeitreihe (Sprungstellen) zu wählen.

Zeit- vs. Frequenzauflösung

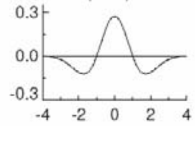
Haar-Wavelet: gute ***Zeit***auflösung

$$\Psi(t) = -1 \quad -0{,}5 \le t < 0$$
$$\Psi(t) = 1 \quad 0 \le t < 0{,}5$$
$$\Psi(t) = 0 \quad sonst$$



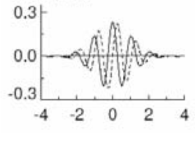
Mexikanischer Hut: ***Kompromiss*** zwischen Zeit- und Frequenz-Auflösung

$$\Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}}\left(1-t^2\right)e^{-t^2/2}$$



Morlet: gute ***Frequenz***auflösung

$$\Psi(t) = \pi^{-1/4}\, e^{-i\omega_0 t}\, e^{-t^2/2}$$

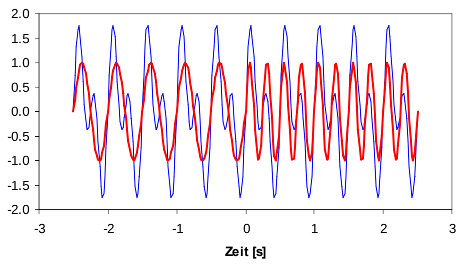


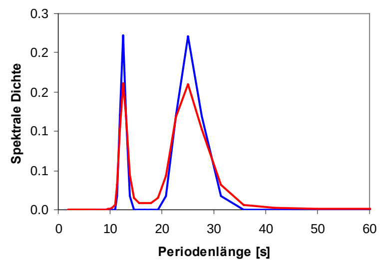
Vergleich Wavelets vs. Fourieranalyse

Zwei Funktionen: $f_1 = \sin(2\pi \cdot 2t) + \sin(2\pi \cdot 4t)$

$$f_2 = \begin{Bmatrix} \sin(2\pi \cdot 2t) & \textit{für } t < 0 \\ \sin(2\pi \cdot 4t) & \textit{für } t > 0 \end{Bmatrix}$$

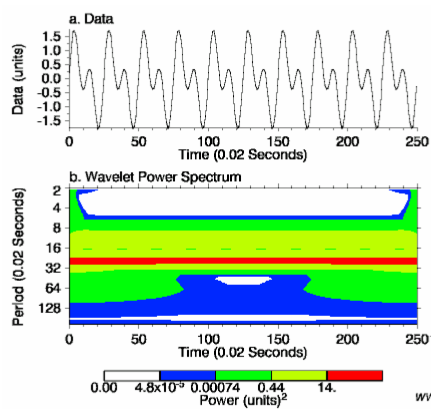
... mit sehr ähnlicher Spektraler Dichte, ...

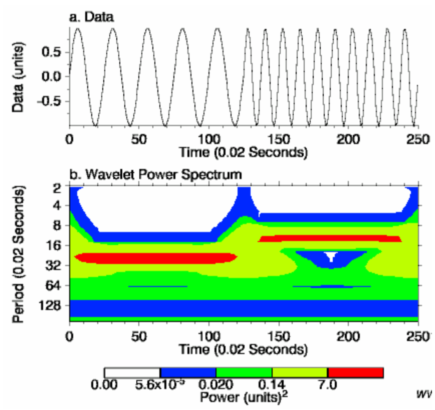




Vergleich Wavelets vs. Fourieranalyse

... aber deutlich unterschiedlichen Wavelet-Powerspektren:





Ablauf der Wavelet-Transformation

1. Wahl des Mutter-Wavelets
2. Fourier-Transformation des Mutter-Wavelets
3. Fourier-Transformation der Zeitreihe
4. Festlegung der Frequenz- und Zeitauflösung
5. Für jede Stauchung und jedes Intervall der Zeitreihe:
   - Bestimmung des Tochter-Wavelets
   - Normalisierung des Tochter-Wavelets
   - Multiplizieren mit der Fouriertransformation der Zeitreihe
   - Rücktransformation
6. Grafische Darstellung

Padding

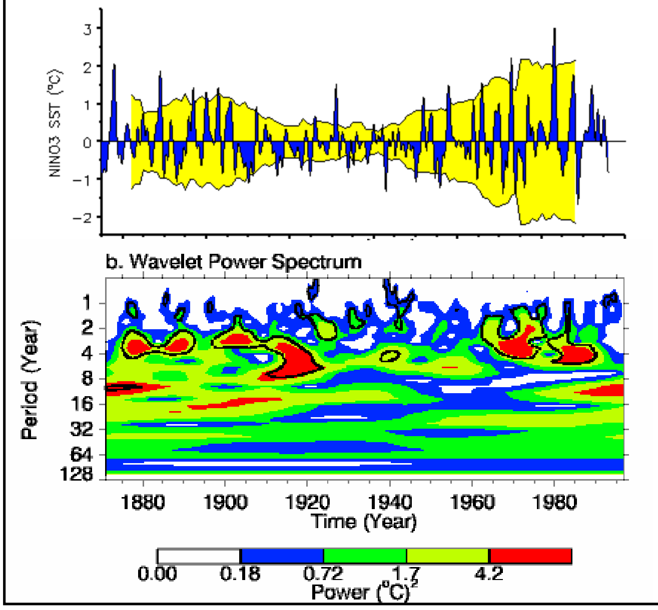
Problem:

- Periodizität als implizite Annahme der Wavelet-Transformation im Fourier-Raum => Signale am Ende der Zeitreihe der Wavelet-Transformation werden bei der Wavelet-Transformation auch dem Beginn der Zeitreihe zugeordnet umgekehrt
- besonders ausgeprägt im niederfrequenten Bereich

Gegenmaßnahme:

- Padding = Ende der Zeitreihe mit Nullen auffüllen
- bis zur Länge $n = 2^p$ (s. FFT)

Sea Surface Temperature (Pazifik)



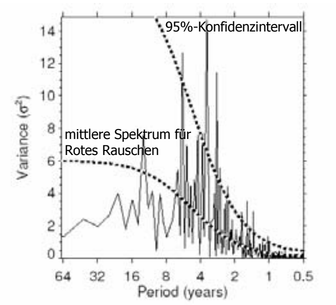
Gelber Bereich:
Mittelwert ± Standardabweichung für ein 15-Jahres-Fenster

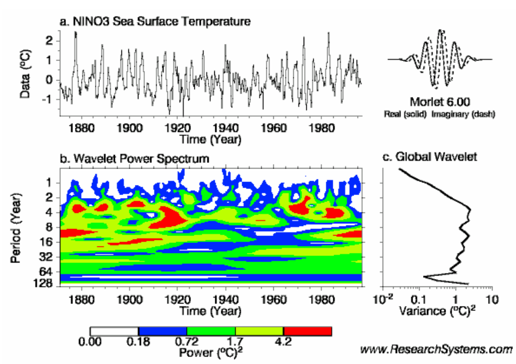
Wavelet Power Spectrum
(Morlet wavelet)

Schwarze Linien: Regionen der 10%-Signifikanz (Test gegen rotes Rauschen)

(http://paos.colorado.edu/research/wavelets/wavelet2.html)

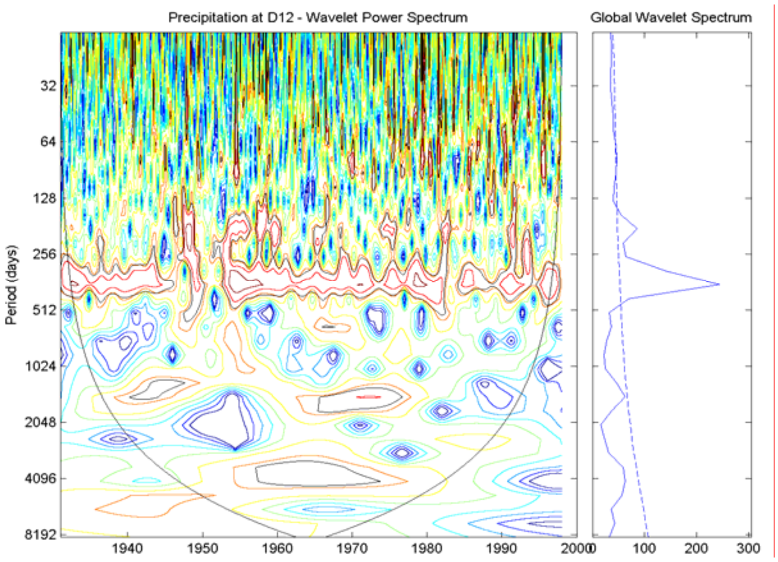
Fourier- und Wavelet-Powerspektrum



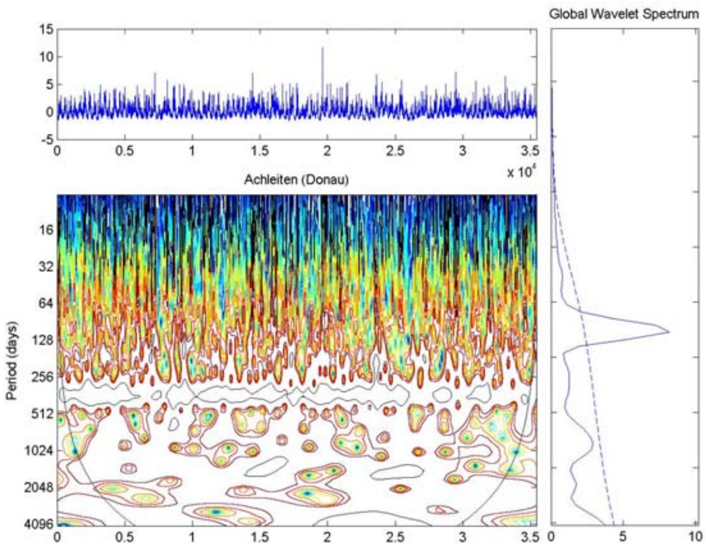


(Torrence und Compo 1998, http://paos.colorado.edu/research/wavelets/wavelet2.html)

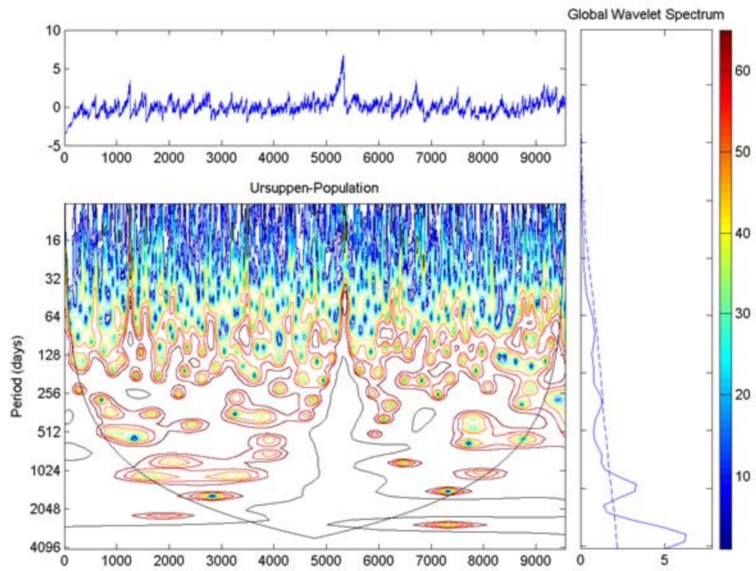
Wavelet: Niederschlag



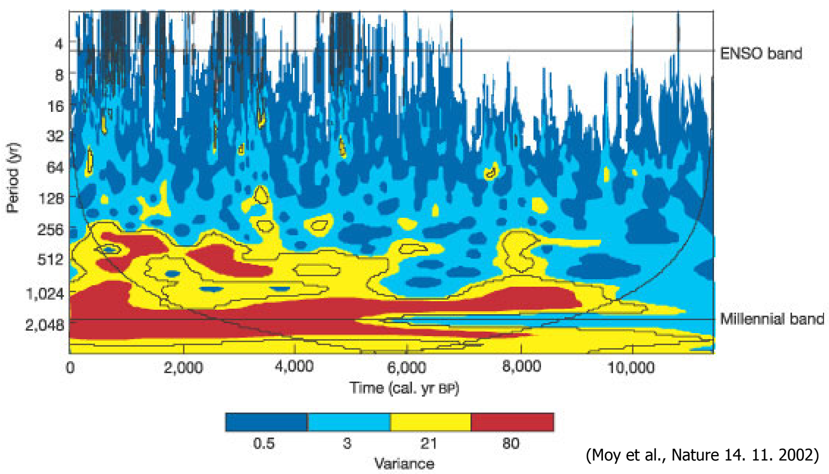
Wavelet: Abfluss



Wavelet: Multiagentensimulationen



Wavelets in Südecuador – El Niño im Holozän



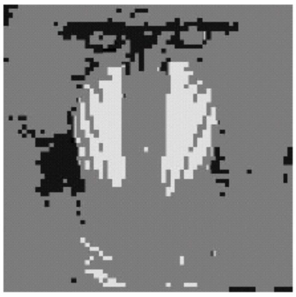
(Moy et al., Nature 14. 11. 2002)

Weitere Anwendungen der Wavelets

- **„Intelligentes“ Filtern von Datensätzen**
  Beispiele: Komprimierung und Glättung von Spektren (Ionenchromatografie, Fernerkundung)
- **Datenkompression**
  Beispiele: Fotos, Audiodateien, Fingerabdrücke (FBI), Biometrie (Iris)
- u.v.m.

Bildkompression mittels Wavelets

Kompressionsrate 178:1



JPEG

(Diskrete Cosinus-Transformation jeweils für einzelne Bildblöcke)

Wavelet

(C. Rauch, TU München 1999, zitiert in: http://wwwdvs.informatik.uni-kl.de/courses/seminar/SS2003/ausarbeitung10.pdf)

Zeitreihenanalyse im Web

Allgemein:

- http://www.gfi.uib.no/~nilsg/kurs/notes/course.html
- http://www.library.cornell.edu/nr/cbookcpdf.html (***Numerical Recipes***)

Wavelets:

- http://paos.colorado.edu/research/wavelets/

Aufgabe

1. Generieren Sie eine künstliche Zeitreihe als Kombination einzelner *sin*- oder *cos*-Fuktionen und führen Sie damit eine Waveletanalyse durch. Benutzen Sie dazu das Online-Tool unter ***http://ion.researchsystems.com/IONScript/wavelet/***.
2. Führen Sie eine Wavelet-Analyse mit den 30-Tages-Werten von Niederschlag, Temperatur und Abfluss mit und ohne Padding durch.
3. Vergleichen Sie den Effekt verschiedener Parametrisierungen und Mutterwavelets.
4. Welche der bekannten Eigenschaften lassen sich in der Waveletanalyse wiedererkennen? Welche zusätzlichen Informationen liefert die Wavelet-Analyse?